PROBLEMAS RESUELTOS DE FÍSICA I

(Mecánica - Movimiento Ondulatorio – Calor)

ATILIO DEL C. FABIAN

ISBN Nº 950-746-121-3

Editor Responsable: Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de Catamarca

EDITORIAL CIENTÍFICA UNIVERSITARIA DE LA SECRETARIA DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CATAMARCA.
Fax: 03833-431180/432136
Avda. Belgrano 300 - Predio Universitario Pabellón Variante I - 2do piso.
San Fernando del Valle de Catamarca - C.P. 4700

CATAMARCA - 2004
REPUBLICA ARGENTINA

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

La presente guía tiene por objetivo brindar los elementos básicos que se debe tener en cuenta para resolver los problemas que se plantean desde el punto de vista físico y aplicarlos a los problemas que se presentan en el estudio de la Geología, para ello cuenta con desarrollos matemáticos necesarios para que el alumno que provenga del polimodal tenga las mismas posibilidades de aprender.

La presente guía se encuentra ordenada por temas, todo de acuerdo a los que se encuentran en el programa teórico 2004, en el inicio de cada tema se entrega las fórmulas fundamentales que se emplean y una metodología que se debe llevar a cabo para resolver los problemas referido al tema de análisis, posteriormente una serie de enunciados de problemas tipos con sus respectivas soluciones explicados y finalmente problemas con resultados a los que debe arribar, únicamente para que el interesado practique.

Los problemas han sido tomados de los diferentes textos (que se pueden consultar al final de la Guía), tal como han sido editados y en otras ocasiones han sido recreados a temas de Geología, por lo que han sufrido las modificaciones necesarias, para que así el estudiante pueda visualizar rápidamente la vinculación directa entre estas dos ciencias.

Metodología general para resolver problemas

Lo primero que se debe hacer cuando estamos frente a un problema de física, es la de realizar una lectura rápida, para tener un panorama general, luego leer nuevamente en forma pausada, para así poder establecer cuales son las leyes físicas que nos van a servir de base para plantear el problema.

Posteriormente se procede a establecer, por un lado los datos que nos da el enunciado, y por otro las incógnitas, para así de esta manera escribir las fórmulas que expresan las leyes correspondientes, y que nos ayudaran a encontrar la solución primeramente en forma literal, para luego introducir los datos numéricos, con el cuidado de colocar siempre expresado en unidades del mismo sistema de medidas.

Luego de obtener el resultado numérico hay que prestar atención al grado de exactitud del mismo.

TEMA 1

MAGNITUDES DE LA FÍSICA

Como la física es una ciencia fundamentalmente experimental, es necesario la utilización de medidas precisas y se expresan en magnitudes diferentes como ser: masa, tiempo, longitud, fuerza, rapidez, temperatura, etc.

El Sistema Internacional de Unidades (SI) ha seleccionado como unidades base, siete magnitudes que a continuación se detallan:

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Cantidad de sustancia	mol	mol
Temperatura	Kelvin	K
Corriente eléctrica	ampere	A
Intensidad Luminosa	candela	cd

A medida que se avance en los temas se darán a conocer unidades derivadas.

Para la unidad de la fuerza en el SI, se denomina Newton (N) y se define:

$$1N = 1\ kg.\ m/s^2.$$

Otros Sistemas de medidas es el Inglés, vigente en Estados Unidos, para lo cual tenemos:

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	Pie	ft
Fuerza	Libra	lb
Tiempo	Segundo	s

(para mayor información sobre otros sistemas, puede consultar a tablas de conversión que se encuentran en cualquier texto de Física I.)

En lo que hace a la precisión podemos decir que se mejora constantemente la calidad de los instrumentos de medición y la precisión es mayor, por lo que al tener mayor información de una medida tenemos mas cifras significativas por lo que se podría cometer errores al tener demasiados o muy pocas. Los cuales dependerán de los parámetros en los que nos estamos moviendo. Por ejemplo: estamos pesando objetos de mas de 100 kg., y de repente aparece un peso de menos de 1 kg., supongamos 0,153 kg., su incidencia en la suma es poco

significativa, y sería conveniente tomar una sola cifra significativa, 0,1 kg, porque a partir de la segunda cifra aporta poca información en el contexto de la pesada.
PROBLEMAS:

Pb. 1. 01.-
Un estudiante de Geología de la UNCa le escribe a un amigo de Estados Unidos y le dice que mide 1,87 m., ¿cuánto medirá en unidades inglesas?.

Solución:
Si tenemos que: 1m (metro) es equivalente a 3,28 ft (pie), entonces el estudiante tendrá 6,1336 ft.

Pb. 1. 02.- Resnick
Entre Nueva York y los Ángeles hay una distancia aproximada de 3000 millas, la diferencia temporal entre las dos ciudades es de 3 horas. Calcule la circunferencia de la Tierra.
Solución: 38.622,42 Km.(a esa latitud).

Pb. 1. 03.- Resnick
Una persona pierde 0,23kg (equivalente a aproximadamente 0,5 lb) por semana, exprese la tasa de pérdida de masa en miligramos por segundo.
Solución: 0,38mg/s.

Pb. 1. 04.- Resnick
Los granos de arena fina de las playas de California tienen un radio promedio de 50 μm. ¿Qué masa de granos de arena tendrá un área superficial total igual a la de un cubo exactamente de 1 m en un borde?. La arena se compone de dióxido de silicio, 1 m^3 tiene una masa de 2600 Kg.
Solución: 0,260 Kg.

Pb. 1. 05.- Resnick
Suponga que tarda 12 horas en vaciar un contenedor de 5700 m^3 de agua. ¿Cuál es el gasto de masa (en kg/s) del agua proveniente del contenedor?. La densidad del agua es de 1000kg/m^3.
Solución: 131,94 kg/s.

Pb. 1. 06.-
Suponga que usted es un gran ciclista, y en un tramo recto de una pista, tuvo un record de 85 Km/h., expréselo en m/s.
Solución: 23,61 m/s.

TEMA 2

MOVIMIENTO EN UNA DIMENSION

En esta unidad tenemos problemas de la cinemática con aplicaciones a temas de la geología.

Los principales sistemas de medidas son: SI cuyas unidades fundamentales son el Metro (m), el Kilogramo masa (kg) y el Segundo (s).

El sistema CGS cuyas unidades fundamentales son el centímetro (cm), el Gramo masa (g) y el Segundo (s).

Las principales fórmulas aplicables a este tema son las siguientes:
En el caso general del movimiento rectilíneo la velocidad:

v = ds /dt, como la unidad de longitud es el metro y la del tiempo el segundo, la unidad de la velocidad en el sistema SI será 1 m/s., y como la aceleración es:

., a = dv/ dt, se medirá en 1 m/s^2.

Cuando el movimiento es rectilíneo y uniforme tenemos que la v = constante, y la aceleración a = 0.

Si el movimiento es rectilíneo y uniformemente variado tenemos: el desplazamiento será:

$$S = V_0.t + \frac{1}{2}a.t^2$$

Y la velocidad será: $V = V_0 + a.t$, la aceleración a = constante.

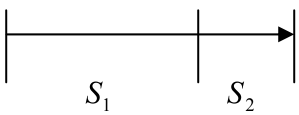
PROBLEMAS:

Pb. 2. 01. Nos encontramos tomando el tiempo de traslado de un compañero de estudio en una motocicleta, durante la primera mitad de un tiempo determinado que estuvo en movimiento llevo una velocidad de 80 Km/h, y durante la segunda mitad la velocidad de 40 Km/h., ¿cuál fue la velocidad media de este estudiante?.

Solución:
Datos: $t_1 = t_2$; $V_1 = 80\, {}^{km}\!/\!_h$; $V_2 = 40\, {}^{km}\!/\!_h$ y las fórmulas a utilizar son:

$$\overline{V} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{S_1 + S_2}{t} \qquad (1)$$

$\overline{V} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$; $\qquad \Delta S = \overline{V}.\Delta t \qquad$ espacio = velocidad uniforme por tiempo



$S_1 \neq S_2 \qquad t_1 = \dfrac{t}{2} \qquad t_2 = \dfrac{t}{2}$

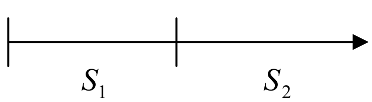
$S_1 = V_1.t_1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = V_1.\dfrac{t}{2}$ por lo tanto $S_2 = V_2.\dfrac{t}{2}$ y reemplazando en (1) y sacando factor común y simplificando los tiempos obtenemos:

$$\overline{V} = \frac{V_1 \frac{t}{2} + V_2 \frac{t}{2}}{t} = \frac{\frac{1}{2}(V_1 + V_2).t}{t} = \frac{V_1 + V_2}{2} = 60\, {}^{km}\!/_{h}$$

Pb. 2. 02. Un estudiante se traslada diariamente en una motocicleta hasta la Universidad, controlamos su velocidad y determinamos que: recorrió la primera mitad del camino con una velocidad de 80 Km/h, y la segunda mitad con una velocidad de 40 Km/h., ¿cuál fue la velocidad media de esta partícula?.

Solución:

Datos: $V_1 = 80\, {}^{km}\!/_{h}$ y $V_2 = 40\, {}^{km}\!/_{h} \qquad S_1 = S_2 \,:\, t_1 \neq t_2$



$\overline{V} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} \qquad \Delta t = \dfrac{\Delta S}{\overline{V}} \qquad t_1 = \dfrac{\frac{S}{2}}{V_1}$ y $\quad t_2 = \dfrac{\frac{S}{2}}{V_2}$ Por lo que

$$\overline{V} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\frac{S}{2V_1} + \frac{S}{2V_2}} = \frac{S}{\frac{S}{2}(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}} = 53{,}33\, {}^{km}\!/_{h}$$

Pb. 2. 03. Al bajar por una ladera una partícula rocosa adquiere una velocidad pero al llegar a la zona plana, esta adquiere un movimiento uniformemente retardado, cuya aceleración negativa es igual a = 0,5 m/s^2., la velocidad inicial de la partícula en la zona plana era de 54 Km/h., ¿cuánto tiempo tardará en depositarse en la zona plana, y a que distancia del punto inicial?.

Solución:

Datos

$a = 0{,}5\, {}^{m}\!/_{seg^2}$ y $V_0 = 54\, {}^{km}\!/_{h}$.,

Al ser un movimiento acelerado tenemos que recurrir a las fórmulas que se encuentren en este tipo de movimiento, para lo cual tenemos que:

.,1) $S = S_0 + V_0.t_1 \pm \frac{a.t_1^2}{2}$., de donde S_0 = 0 ., pero aquí tenemos dos incógnitas que son el espacio y el tiempo, por lo que tenemos que recurrir a otras fórmulas que nos involucren menor cantidad de incógnitas:

2) $V_f^2 = V_0^2 \pm 2aS$
3) $V_f = V_0 \pm a.t$., estas dos parecen las más adecuadas para resolver nuestro problema, y así tomamos para la primera pregunta sobre el tiempo que tardará en depositarse, la 3era., fórmula, y el signo negativo pues la aceleración es negativa ya que esta frenando el movimiento, por lo tanto se encuentra en sentido contrario a éste:

., la velocidad final será por lo expuesto por el problema, igual a cero., y despejando el tiempo obtenemos:

., $t = \frac{V_0}{a}$; $t = \frac{54\, {}^{km}\!/_{h}}{0{,}5\, {}^{m}\!/_{seg^2}}$ pero aquí observamos que los valores numéricos se corresponden con unidades distintas por lo que tendremos que reducirla a una de los dos, para estos aplicamos lo que se denomina la regla del 1 x 1., y así obtenemos:

$\frac{1k}{1h} x \frac{1h}{3600seg} x \frac{1000m}{1km} = 0{,}277\, {}^{m}\!/_{seg}$ o sea que este resultado es equivalente a 1 ${}^{km}\!/_{h}$, por lo que:

$$t = \frac{54}{0,5} \times 0,277 = 29,91 \, {}^{m}/_{seg} \times {}^{seg^2}/_{m} = 29,91 seg.$$

una vez obtenido el tiempo, ya podemos utilizar las fórmulas 1) o la 2)

si usamos la 2), obtenemos:

$V_f = 0$., por lo tanto $V_0^2 = 2.a.S$ (en este caso también mantenemos la aceleración negativa pues tiene un sentido al movimiento y luego realizamos los pasajes de términos correspondiente), y por lo tanto el espacio recorrido es:

$$S = \frac{V_0^2}{2.a} = \frac{(54x0,277)^2}{2x0,5} = 223,74m.$$

O sea que la distancia que se depositará desde el punto inicial es de 223,74 metros.

Pb. 2. 04. Un estudiante de geología se encuentra frente a un corte vertical en roca, al cual no le es fácil acceder y desea medir la altura de dicho corte, para lo cual provisto de un cronómetro lanza un fragmento rocoso en forma vertical hasta el borde del corte, el fragmento regresa al cabo de 3seg, no tener en cuenta la resistencia del aire y calcular a) la velocidad inicial de lanzamiento, b) ¿cuál es la altura del corte?.
Solución:
Como el tiempo total de ida y regreso es:

$t_1 + t_2 = 3s = t_t$; por lo tanto tenemos que $t_1 = 1,5s.$

$$V_f = V_0 + a.t, \Rightarrow V_f = 0 = V_0 - g.t$$
$$V_0 = g.t = 9,8 \, {}^{m}/_{s^2} .1,5s = 14,4 \, {}^{m}/_{s}$$

para calcular la altura podemos recurrir a dos fórmulas:

$$h = V_0.t - \frac{1}{2}.g.t; \Rightarrow también \Rightarrow V_f^2 = V_0^2 - 2g.h$$
$$obteniendo: h = \frac{V_0^2}{2g} = 10,57m$$

Pb. 2. 05.- Volkenshtein, (modificado)
Un geólogo se encuentra parado sobre una ladera vertical de una altura

h = 19,6 m, dejando caer un fragmento rocoso. ¿qué camino recorrerá este cuerpo? a) durante el primer 0,1seg de estar en movimiento y 2) durante el último 0,1seg de su caída, la resistencia del aire no se tiene en cuenta.

Solución:

Datos: $V_o = 0$; $a = g$, $t_1 = 0{,}1seg$, $t_2 = t_t - 0{,}1seg.$, $h = 19{,}6$ m.
., t_t = tiempo total de caída libre
la fórmula a utilizar en un movimiento acelerado, en una caída libre la aceleración actuante es la aceleración de la gravedad, por lo que reemplazamos por g. Así tenemos que, donde

$h = V_0.t_1 \pm \frac{g.t_1^2}{2}$., donde el primer término $V_0.t = 0$., por lo que nos queda:

$$h = \frac{g.t_1^2}{2} = \frac{9{,}8\,{}^{m}\!/\!{}_{seg^2}.(0{,}1seg)^2}{2} = 0{,}045m.$$

luego pasamos a calcular el tiempo total para la caída libre, para poder así saber que camino recorrió el último 0,1seg.

$h = \frac{g.t^2}{2}$., luego $t = \sqrt{\frac{2.h}{g}}$ para $t_t - 0{,}1seg., h = \frac{g(t_t - 0{,}1seg)^2}{2}$

reemplace en la ecuación algebraica por los valores correspondiente y obtenga el resultado.

Pb. 2. 06.- Volkenshtein, (modificado).
Un estudiante parado en la parte superior de un corte natural vertical, intenta medir el espesor del estrato horizontal superior, para lo cual deja caer un fragmento de roca en caída libre, pero solamente logra cronometrar el ultimo segundo de la caída que recorre la mitad del espesor del estrato, hallar a) ¿ que espesor tiene el estrato, y b) ¿cuanto dura la caída total del fragmento.

Solución:

Datos: $t_2 = 1seg., H = h_1 + h_2., h_1 = h_2., V_0 = 0$

Como se trata de un movimiento acelerado, recurrimos a las fórmulas que aporta este movimiento y reemplazamos a la aceleración por la aceleración de la gravedad g.

Partimos que $h = V_0.t + \frac{g.t^2}{2}$ (se usa el signo + porque la aceleración de la gravedad aumenta la velocidad o sea que tiene el mismo sentido del movimiento).

$H = \frac{g.T^2}{2}.,\Rightarrow h_1 = \frac{g.t_1^2}{2}.,\Rightarrow h_2 = H - h_1$ ahora con el planteamiento del problema pasamos a escribir la ecuación que nos ayudará a resolverlo, teniendo en cuenta que $h_1 = h_2$: por lo tanto en la ecuación reemplazamos ambos valores y procedemos algebraicamente:

$$h_2 = \frac{g.T^2}{2} - \frac{g.t_1^2}{2}.,\Rightarrow \frac{g.t_1^2}{2} = \frac{g.T^2}{2} - \frac{g.t_1^2}{2}.,\Rightarrow g.t_1^2 = \frac{g.T^2}{2}.,\Rightarrow 2t_1^2 = T^2.,$$

con esta ecuación obtenemos el valor de $T = \sqrt{2.t_1^2} = t_1\sqrt{2}$

como $t_1 = T - t_{2.,} \Rightarrow T = t._1\sqrt{2} = (T - t_2)\sqrt{2}.,\Rightarrow T = T.\sqrt{2} - t._2\sqrt{2}$

sacando factor común el tiempo total de caída, obtenemos;

$$t_2.\sqrt{2} = T(\sqrt{2} - 1).,\Rightarrow despejando \Rightarrow T = \frac{t_2.\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)}$$

como podemos observar la riqueza de esta expresión algebraica, ya que para cualquier t_2 se puede sacar la altura total de la caída libre, obviamente no teniendo en cuenta la fricción con el aire.
Para este caso el tiempo total es de 3,41 s, y el espesor del estrato es de 57,5 m, bien queda como práctica el de comprobar si los resultados son idénticos para la expresiones de las fórmulas:

, $h_1 = \frac{g.t_1^2}{2}$ para $h_2 = V_{02}.t + \frac{g.t_2^2}{2}$., donde V_{o2} se calcula de la expresión:

$V_{f1} = V_0 + g.t_1$ donde $V_{f1} = V_{02}$., ya que $V_{01} = 0$

Pb. 2. 07.-
Sea un planeta con una gravedad igual a la mitad de la terrestre (g) ¿cuánto tiempo más necesitaría un cuerpo para caer desde el reposo con respecto a una que cae de la misma altura en la tierra?.

Solución:
Datos: g_p = ½g., donde g_p = gravedad del planeta y g = gravedad terrestre.

Entonces tenemos que:

., $h_p = \frac{g.t_p^2}{2.2}$ = altura de caída en el planeta

., $h_t = \frac{g.t_t^2}{2}$ = altura de caída en la tierra

como $h_p = h_t$ tenemos que: $\frac{g.t_p^2}{4} = \frac{g.t_t^2}{2}$ y de esta manera obtenemos luego de las correspondientes simplificaciones:

$t_p = t_t.\sqrt{2}$

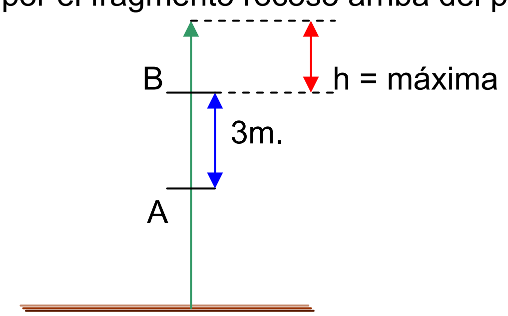
Pb. 2. 08.- Resnick. (modificado).
Se deja caer una roca desde el borde de un acantilado de 100 m de altura. ¿Cuánto tarda en caer: a) los primeros 50 m, y b) los segundos 50 m.

R = a) 3,19 s.
b) 1,32 s.

Pb. 2. 09.- Resnick.
Se arroja un fragmento rocoso verticalmente hacia arriba. En su ascenso cruza el punto A, con una rapidez V, y el punto B, que se encuentra 3,0 m más alto que A, con una rapidez $V/2$. Calcule:

a) La rapidez V
b) la altura máxima alcanzada por el fragmento rocoso arriba del punto B.

R = a) $V = 8{,}85\,m/s$
b) $h = 0{,}99m.$



Pb. 2. 10.- Resnick.
Un automóvil sube una colina con una rapidez constante de 40 Km/h, y en el viaje de regreso desciende con una rapidez constante de 60 Km/h. Calcule la rapidez promedio del viaje redondo.

R= 48 km/h.

TEMA 3

FUERZA Y LAS LEYES DE NEWTON

Introducción y metodología para resolver problemas

Si sobre un cuerpo no actúan fuerzas, o actúan varias fuerzas cuya resultante es 0, decimos que el cuerpo está en **equilibrio**. En equilibrio, un cuerpo está en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante. Para un cuerpo en equilibrio, la fuerza neta es cero, esto nos indica la **1era. Ley de Newton**.

$\sum \vec{F} = 0.,\Rightarrow \sum F_x = 0.,\Rightarrow \sum F_y = 0$., para que se cumpla que las sumatorias de las fuerzas sea igual a 0, cada componente de la fuerza neta deber ser 0.

Pero que ocurre si la fuerza neta no es 0., entonces tenemos que la presencia de una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo hace que éste se acelere. La dirección de la aceleración es la de la fuerza neta. Si la magnitud de la fuerza es constante, también lo será la magnitud de la aceleración. Esto también se aplica a un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva. Pero si una combinación de fuerzas se aplica a un cuerpo, éste tendrá la misma aceleración (magnitud y dirección), que si se aplicara una sola fuerza igual a la suma vectorial, tanto para una trayectoria curva o rectilínea, resumido en un solo enunciado llamada **Segunda Ley de Newton**:

$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$ (segunda ley de Newton)

normalmente se la usa en forma de componentes, con una ecuación para cada componente de fuerza y la aceleración correspondiente:

$\sum F_x = m.a_x.,\therefore \sum F_y = m.a_y.,\therefore \sum F_z = m.a_z$., cada componente de la fuerza total es igual a la masa multiplicada por la componente correspondiente de la aceleración. Tener en cuenta que esta ecuación solo es válida si la masa es constante., y también tener cuidado que $m.\vec{a}$ no es una fuerza, sino que es igual en magnitud y dirección a la resultante $\sum \vec{F}$., de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B (una "acción"), entonces B, ejerce una fuerza sobre A (una "reacción"). Estas fuerzas tienen la misma magnitud y dirección pero sentido opuesto, y actúan sobre diferentes cuerpos. Esta es la **Tercera Ley de Newton**.

$\vec{F}_{A.sobre.B} = -\vec{F}_{B.sobre.A}$

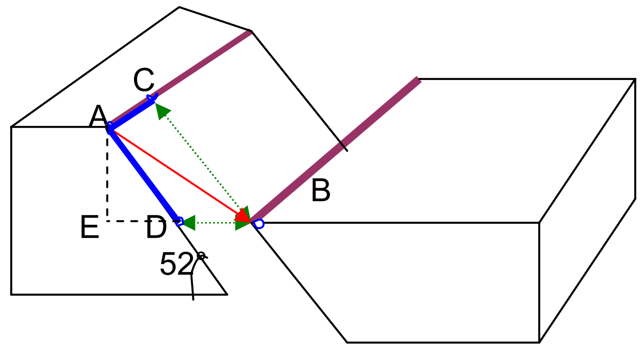
Abocándose al problema primeramente defina su sistema de coordenadas, indicando el origen y la dirección del eje positivo, si conoce el sentido de la aceleración, suele ser conveniente tomarla como dirección positiva. Al aplicar la primera o la segunda ley de Newton dibuje el diagrama de cuerpo con todas las fuerzas que actúan sobre él, sin incluir las que actúen sobre otros cuerpos., es conveniente usar colores para indicar las distintas fuerzas. Al escribir tanto la primera como la segunda ley, hágalo en forma de componentes usando el sistema de coordenadas definido previamente, no dejando de lado la exactitud de los ángulos si los hubiera. No olvidar que una superficie en contacto con el cuerpo ejerce una fuerza normal perpendicular a la superficie, y una fuerza de fricción paralela a la superficie., y que una cadena o una cuerda no pueden empujar un cuerpo sino tirar de él en la dirección de su longitud, Luego podrá despejar las incógnitas en estas ecuaciones.

Cuando estamos usando la segunda ley de Newton y hay mas de un cuerpo, repita los pasos para cada uno de ellos, usando una ecuación para cada componentes, antes de pasar a despejar incógnitas, ya que puede haber relaciones entre los movimientos de los cuerpos. Si por ejemplo están unidos por una cuerda o cadena y accionan en forma conjunta, la aceleración es la misma para todos los cuerpos actuantes, cuando actúan en el mismo sentido.

PROBLEMAS:

Pb. 3. 01.- Resnick.
Los puntos A y B coinciden antes de producirse la falla, en un cuerpo de roca granítica, que luego de producirse el desplazamiento de un bloque con respecto al otro, queda en la posición actual, donde la componente horizontal es la línea AC, la componente vertical del desplazamiento medida sobre la línea de mayor inclinación es AD.
a)¿Cuál es el desplazamiento neto, si el desplazamiento horizontal es de 22 m y el vertical de 17 m?.
b)Si el plano de la falla tiene una inclinación de 52° con el horizonte, ¿cuál es el desplazamiento vertical neto de B como resultado de la falla en a)?.

Gráfico:



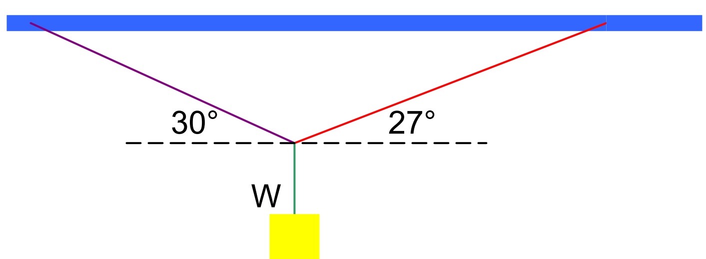
a) Para resolver este punto tenemos que tomar el triángulo que forma sobre el plano de desplazamiento (plano de falla) los puntos A, B, C, donde el desplazamiento neto es la hipotenusa, por lo tanto recurrimos a Pitágoras, para encontrar el resultado:

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} = 27{,}8 \text{ m.}$$

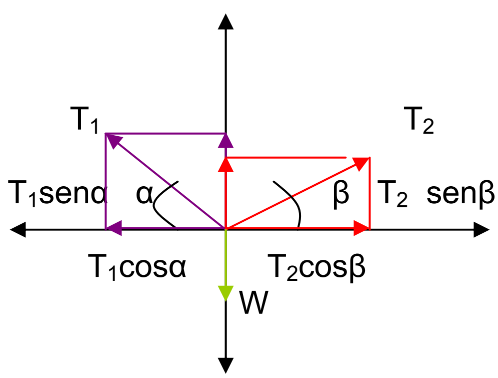
b) En este caso tenemos que proyectar un triángulo entre los puntos A, D, E, y calcular el lado opuesto al ángulo dado como dato, y de esta manera obtenemos el rechazo o desplazamiento vertical neto de B., ya que el punto D, se encuentra al mismo nivel que B.

$$AE = sen52°.AD. = 13{,}39 \text{ m.}$$

Pb. 3. 02.-
Si las cuerdas utilizadas para soportar una muestra de roca, como muestra la fig., pueden sostener únicamente 120 kg., ¿cuál es el peso máximo W que puede resistirse sin que se rompan aquellas?.



Solución:



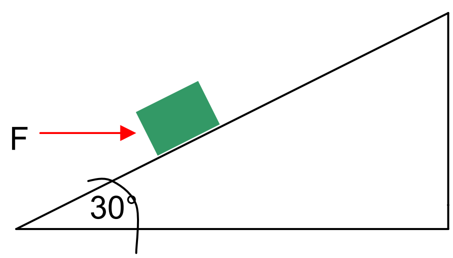
$$\sum F_x = T_2.\cos\beta - T_1.\cos\alpha = 0$$

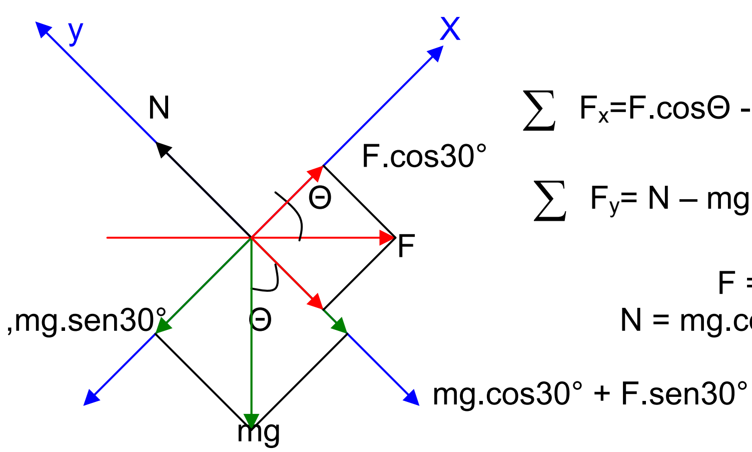
$$\sum F_y = T_1.sen\alpha + T_2.sen\beta - W = 0$$

$T_1 = T_2 = 120kg. \therefore \Rightarrow W = T(sen\alpha + sen\beta) = 114{,}47kgf.$

Pb. 3. 03.-

Una caja con muestras de rocas de 100 kg, es empujada hacia arriba a velocidad constante sobre un tablón, para subirlo a la caja de un camión. El tablón tiene 30 grados con respecto a la horizontal., a) ¿qué fuerza horizontal F es requerida?., b) ¿cuánto vale la fuerza ejercida por el tablón sobre la caja?.





$\sum F_x = F.\cos\Theta - mg.\mathrm{sen}\Theta = 0$

$\sum F_y = N - mg.\cos\Theta - F.\mathrm{sen}\Theta = 0$

F = mg.tag.Θ = 565,5 N.
N = mg.cosΘ + F.senΘ = 1131,45 N.

$\boxed{\begin{array}{l} F = 565{,}5\ N. \\ N = 1131{,}45\ N. \end{array}}$

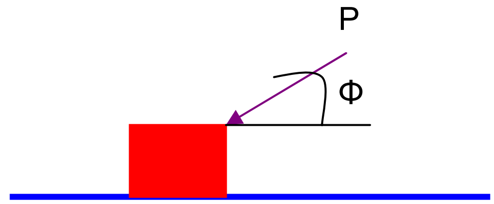
Pb. 3. 04.-

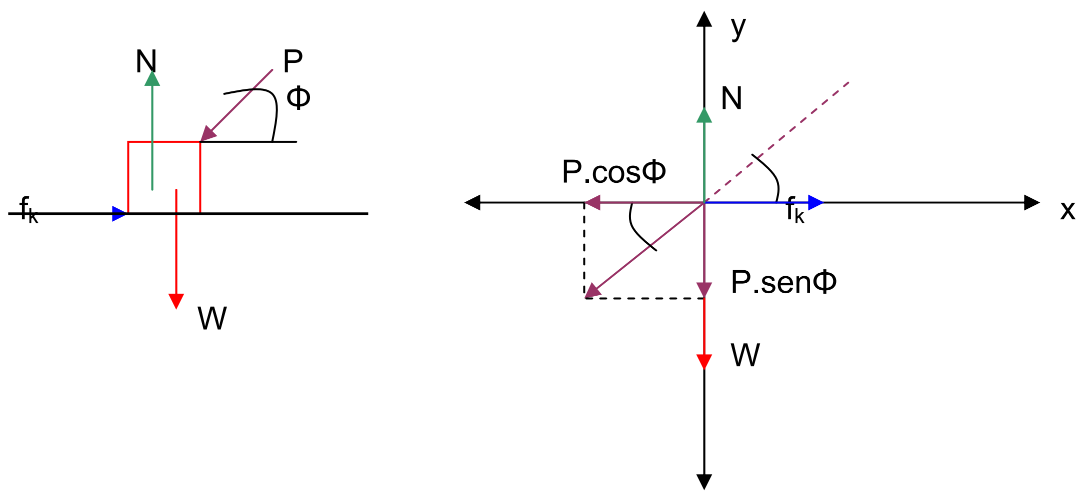
Suponiendo que un estudiante hace deslizar un bloque de roca granítica hacia la izquierda (ver fig), a lo largo de la superficie a velocidad constante, empujándola con una barreta que forma un ángulo Φ, por encima de la horizontal.

a) Dibuje un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan en el bloque.
b) Hállese la fuerza normal N.; la fuerza de rozamiento f_k y la fuerza P.

Si W = 100 N; Φ = 30°.; μ_k = 0,25

c) Hállese el valor de Φ por encima del cual el estudiante no puede mantener el bloque en movimiento, cualesquiera que sea la fuerza con que empuje.





$$\sum F_y = N - W - P.sen\phi = 0.,\therefore \Rightarrow N = W + P.sen\phi \quad (1)$$

$$\sum F_x = f_k - P.\cos\phi = 0.,\therefore \Rightarrow P = \frac{f_k}{\cos\phi} \quad (2)$$

reemplazando la ecuación (2) en (1), obtenemos:

$N = W + f_k.tag\phi$., como $f_k = N.\mu_k$., nos queda que: $N = W + N.\mu_k.tag\phi$., luego:

$$N.(1 - \mu_k.tag\phi) = W.,\therefore \Rightarrow \boxed{N = \frac{W}{1 - \mu_k.tag\phi}}$$

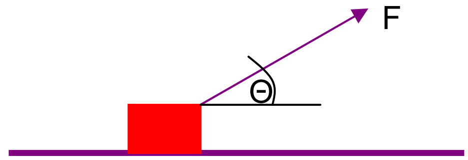
$$\boxed{P = \frac{N - W}{sen\phi}} \qquad \boxed{f_k = P.\cos\phi}$$

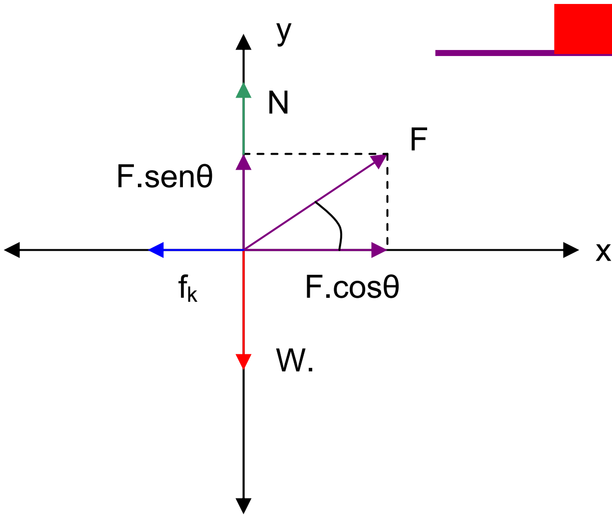
Reemplace los valores correspondientes y obtenga los resultados, para el punto c), deduzca de las fórmulas obtenidas.

Pb. 3. 05.-

El bloque de toba, ver fig., es arrastrado con una cuerda hacia la derecha a velocidad constante., a) demuestre que la fuerza F está dada por la expresión:

$$F = W.\frac{\mu_k}{\cos\theta + \mu._k\, se\theta}$$



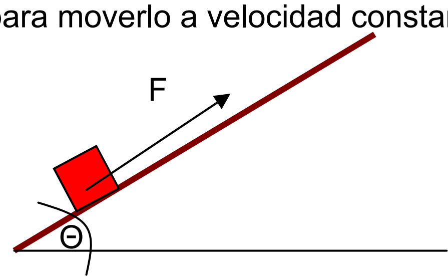


Pb. 3. 06.-
Un estudiante se encuentra en tarea de campo y ubica un bloque de roca en una ladera de filita en un perfecto plano inclinado de 22° respecto a la horizontal, y lo sujeta con un cable. Se supone un coeficiente de rozamiento estático de 0,25 y cinético de 0,15., a)¿cuál es la fuerza F mínima, paralela al plano, que impedirá que el bloque se deslice por el plano hacia abajo?., b) ¿cuál es la fuerza F necesaria para mover el bloque hacia arriba a velocidad constante?. Analice algebraicamente y obtenga los siguientes resultados:

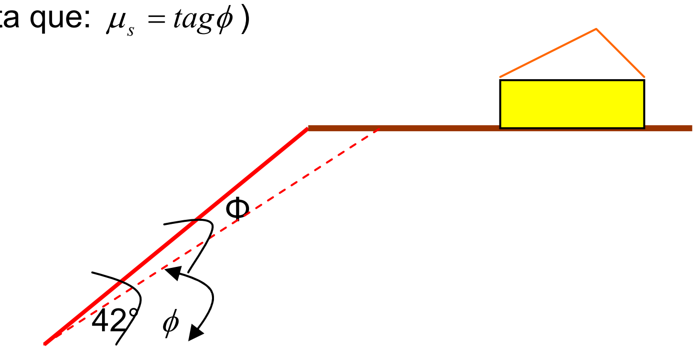
a) 11 N.

b) 47,3 N., para el inicio del movimiento y

   40,1 N, para moverlo a velocidad constante.

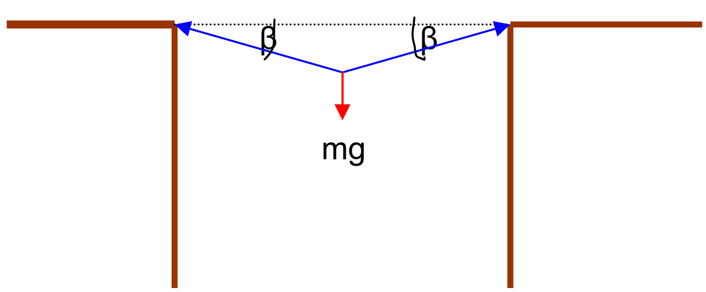


Pb. 3. 07.-
Una casa esta construida en la cima de una colina que tiene un talud de 42°., un desplome posterior del material de la superficie del talud indica que su gradiente debería ser reducido. Si el coeficiente de fricción de suelo contra suelo es de 0,55., ¿en que ángulo Φ adicional (véase fig.) debería ser corregida la superficie del talud.
(tenga en cuenta que: $\mu_s = tag\phi$)



R. Φ ≅ 14°

Pb. 3. 08.-
Un geólogo audaz en busca de un fósil cruza de un risco a otro colgando de una cuerda tendida entre los riscos. El se detiene a la mitad para descansar (ver figura). La cuerda se rompe si su tensión excede el valor de 3 x 10^4 N, y la masa de nuestro hombre es de 81,6kg. a) Si el ángulo β es de 15°, calcule la tensión en la cuerda., b) ¿Qué valor mínimo puede tener β sin que se rompa la cuerda?.

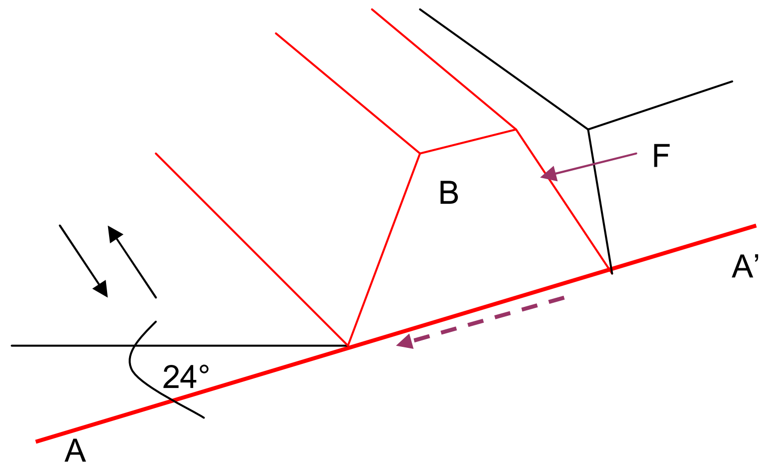


R = a) 1,54 x 10^3 N.
b) 0,764°.

Pb. 3. 09. Resnick.
La fig. muestra la sección transversal de un camino cortado en la ladera de una montaña, la línea A - A´., representa al plano de estratificación débil en el cual es posible un deslizamiento. El bloque B directamente arriba del camino está separado de la roca ladera arriba por una grieta grande (producto de una diaclasa de descompresión) de manera tal que sólo la fuerza de fricción entre el bloque y la probable superficie de falla impide el deslizamiento. La masa del bloque es de 1,8

x 10^7kg, el ángulo de inclinación del plano de la falla es de 24°, y el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es de 0,63.,

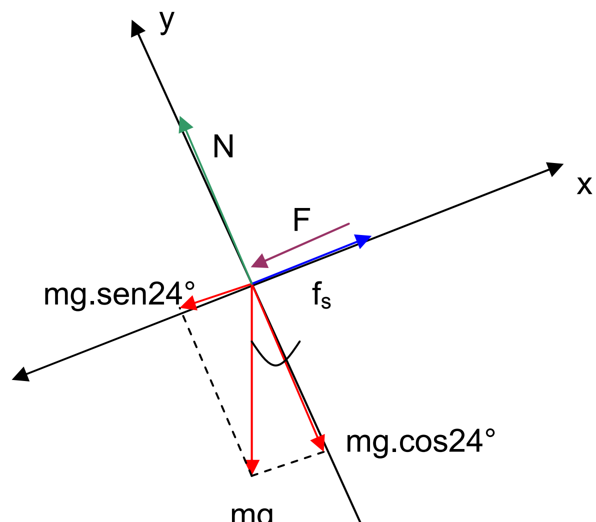
a) Demuestre que el bloque no se deslizará.



b) En la grieta se filtra agua, ejerciendo una fuerza hidrostática F paralela a la inclinación del bloque. ¿qué valor mínimo de F provocaría un deslizamiento?.

Solución:
a) tag.24°= $\mu_s{}' = 0{,}445$

,$\mu_s > \mu_s{}'$; 0,63 > 0,445



$$\sum F_y = N - m.g.\cos 24° = 0.,\therefore \Rightarrow N = m.g.\cos 24°$$
$$\sum F_x = f_s - m.g.sen24° - F = 0.,\therefore \Rightarrow F = f_s - m.g.sen24° = N.\mu_s - m.g.sen24°$$

$$\boxed{F = m.g.\cos 24°.\mu_s - m.g.sen24°}$$

Pb. 3. 10.- Resnick.

Una nave de aterrizaje se aproxima a la superficie de Calixto, uno de los satélites (luna) de Júpiter, si el motor del cohete le imprime un empuje hacia arriba de 3260 N, la nave descendería a velocidad constante, considerando que Calixto no tuviera atmósfera. Si el empuje hacia arriba es de 2200 N, la nave aceleraría hacia abajo a 0,390 m/s^2.

a) ¿Cuánto pesa la nave de aterrizaje cerca la superficie de Calixto?

b) ¿Cuál es su masa?.

c) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de Calixto?.

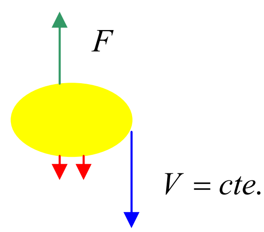
Solución:

Datos:

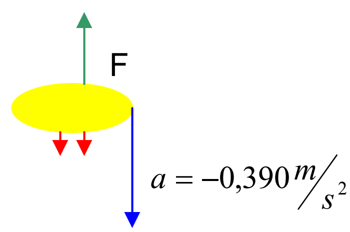
Si $V = cte.,\therefore \Rightarrow a = 0.,\therefore \Rightarrow F_1 = 3260N.$

$V \neq cte.,\therefore \Rightarrow a = -0.390\, {}^{m}\!/_{s^2}.,\Rightarrow F_2 = 2200N.$

a) $$F_1 - mg = 0$$
$$mg = F_1 = 3260N.$$



b) $$mg - F_2 = m.a$$
$$m = \frac{mg - F_2}{a} = \frac{(3260 - 2200)N}{0{,}39\, {}^{m}\!/_{s^2}} = 2718kg.$$



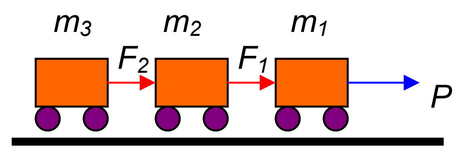
c) $$F_1 = m.g$$
$$g = \frac{F_1}{m} = \frac{3260N}{2718kg} = 1{,}20\, {}^{m}\!/_{s^2}.$$

Pb. 3. 11.- Resnick. (modificado).

En una mina de explotación subterránea, se emplea 3 vagones para extraer el mineral desde el interior, los vagones tienen una masa: m_1 = 310 kg; m_2 = 240 kg y m_3 = 120 kg, y se encuentran unidos por un cable, cuya masa se desprecia. Si se tira de ellos con una fuerza horizontal P = 650 N, sin considerar la fricción de las ruedas, obtenga:

a) La aceleración del sistema.
b) La fuerza ejercida por el segundo vagón sobre el tercero.
c) La fuerza ejercida por el primer vagón sobre el segundo.

Solución:



$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 670kg.$$

a) $\sum F = m.a$., despejando la aceleración tenemos:

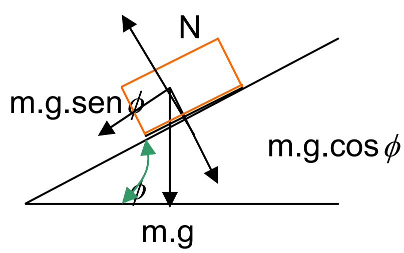
$$a = \frac{F}{m} = \frac{650N}{670kg} = 0{,}97\,{}^{m}\!/_{s^2}.$$

b) $F_2 = m_3.a = 116{,}5N$

c) $F_1 = (m_2 + m_3).a = 349{,}3N.$

Pb. 3. 12.- Sears.

¿Cuál es la aceleración de un bloque sobre un plano inclinado liso que forma un ángulo determinado con la horizontal?.



$$F = m.a$$

$$m.g.sen\phi = m.a$$

$$a = g.sen\phi$$

Pb. 3. 13. Resnick (modificado).

Unos mineros están introduciendo equipos en un elevador de carga, que se encuentra en un pique vertical, sin embargo, ante una falla de seguridad lo sobrecargan y el cable desgastado se corta. En el momento del accidente la masa del elevador cargado es de 1600 kg. Al caer, los carriles guías ejercen sobre él una fuerza retardadora de 3700 N. ¿Con que rapidez chocara el elevador contra el fondo del pique 72 m abajo?.

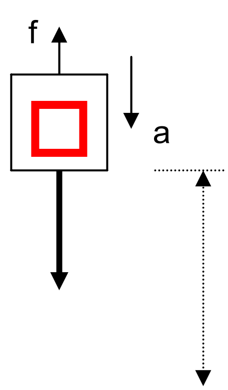
Solución:

$m = 1600kg., f = 3.700N., h = 72m.$

Empleamos la segunda Ley de Newton: $F = m.a$

Tomamos positivo en sentido descendente.

$$F - f = m.a$$



1600kg.9,8m/s^2 – 3700 N = 1600kg.a

$$a = \frac{(1600.9{,}8 - 3700)kg.m/s^2}{1600kg} = 7{,}487\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

F=mg   h = 72m

$$como: V_f^2 = V_0^2 + 2.a.h$$
$$V_f = \sqrt{2.a.h} = 32{,}8\, {}^{m}\!/_{s}$$

Pb. 3. 14.-
Un ascensor en un pique de una mina de explotación subterránea, es llevado al reposo desde una velocidad de 6 m/seg., con aceleración constante en un trayecto de 15 metros. Qué fuerza ejercerá sobre el piso un muestreador y su carga que pesan 100 Kgf., a) ¿cuando el ascensor sube?., b) cuando el ascensor baja., y c) que ocurre si se corta el cable.

Solución:

$$d = 15m. \qquad W = 100Kgf., \rightarrow V_0 = 6\, {}^{m}\!/_{s}., \qquad V_f = 0$$

$$V_f^2 = V_0^2 - 2.a.d = 0 \qquad a = \frac{V_0^2}{2.d} \qquad W = m.g$$

a) para un ascensor que sube:

$$F - m.g = m.a., \Rightarrow F - W = \frac{W}{g}.a., \Rightarrow F = W(1 + \frac{a}{g})$$

deberá colocar los valores correspondiente para el peso W, previo cálculo de la aceleración., siguiendo el ejemplo calcule b) y c).

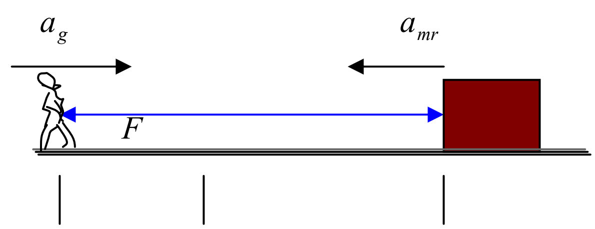
Pb. 3. 15.

Un geólogo de 80 kg, y un paquete de muestras de rocas de 12 Kg., están sobre la superficie de un lago congelado separados 15 m, a través de una soga el geólogo ejerce una fuerza hacia él, de 5,2 N sobre el paquete., a)¿cuál es la aceleración del paquete?., b) ¿cuál es la aceleración del geólogo?., c) ¿a que distancia con respecto a la posición inicial del geólogo se encuentran, suponiendo que la fuerza permanece constante?. Asuma que no existe rozamiento.

Solución:

Al tratar de traer el paquete de muestra hacia él, aplicando una fuerza, y al no tener fricción que lo mantenga en el lugar, genera un movimiento del geólogo hacia el paquete y de éste hacia el geólogo.

Datos: $m_g = 80kg., m_{mr} = 12kg.$
$d = 15m., F = 5{,}2N.$.,



$a) a_{mr} = \frac{F}{m_{mr}} = \frac{5{,}2N}{12kg} = 0{,}4333 m/seg^2.$ =aceleración del paquete de muestra.

$b) a_g = \frac{F}{m_g} = \frac{5{,}2N}{80kg} = 0{,}065 m/seg^2$ = aceleración del geólogo.

Aquí tenemos un caso en la que las aceleraciones son de sentido contrario, sus masas son distintas y por lo tanto la magnitud de la aceleración de cada objeto son diferentes.

$$c) x_g = \frac{1}{2}.a_g.t^2.,\therefore \Rightarrow t^2 = \frac{2.x_g}{a_g}$$

$$x_{mr} = \frac{a_{mr}}{2}.t^2.,\Rightarrow x_{mr} = \frac{a_{mr}}{2}.\frac{2.x_g}{a_g} \qquad \boxed{d - x_g = x_{mr}}$$

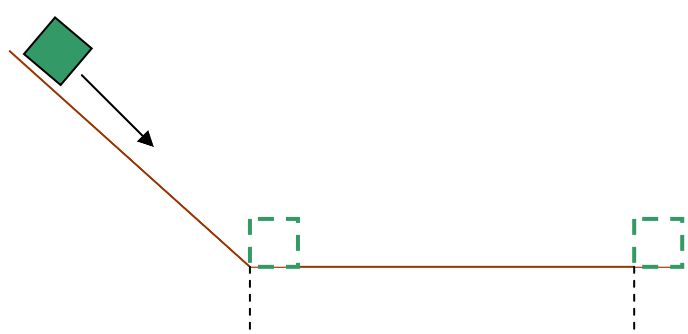
$$d - x_g = \frac{a_{mr}}{a_g}.x_g \Rightarrow d = x_g.\left(1 + \frac{a_{mr}}{a_g}\right) \therefore \Rightarrow x_g = \frac{d}{1 + \frac{a_{mr}}{a_g}} = 1{,}96m$$

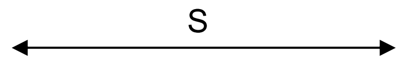
como se puede observar, los tiempos de desplazamientos son iguales, y la distancia que los separa d = 15 metros. Reemplazando los valores correspondientes obtenemos la distancia de encuentro desde la posición inicial del geólogo.

Pb. 3. 16.-

Un bloque de roca se desliza por una ladera y adquiere una velocidad de 80 Km./h, al llegar a una superficie de un camino, se detiene a los 40 metros, el peso aproximado es de 13.000 N, encuentre: a) la fuerza que ejerce el piso sobre el bloque para frenarlo., b) el tiempo requerido para pararse. Tomando la aceleración de frenado, encuentre: c) la distancia y d) el tiempo requerido para pararse si el bloque tuviera una velocidad inicial de 40 Km/h.

Solución:





$$F = m.a$$

a,b) $$V_f^2 = V_0^2 - 2.a.S.,\therefore \Rightarrow a = \frac{V_0^2}{2S} = 6{,}17m/seg^2..,\therefore \Rightarrow F = m.a = \frac{W}{g}.a = 8184{,}69N$$

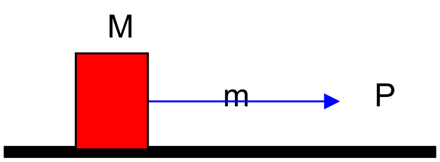
$$a = \frac{V_0}{t} \Rightarrow t = \frac{V_0}{a} = 3{,}60seg.$$

c,d) $$V_0 = 40km/h = 11{,}11m/seg.,\therefore \Rightarrow F = m.a = \frac{W}{g}.\frac{V_0^2}{2.S} \therefore \Rightarrow S = \frac{W.V_0^2}{g.2.F} = 10m.$$

$$a_1 = \frac{V_0^2}{2.S} = 6{,}17m/seg^2.,\therefore \Rightarrow t_1 = \frac{V_0}{a} = 1{,}80seg.$$

Pb. 3. 17.- Resnick.

Como se indica en la figura, una cuerda de masa m, tira un bloque de masa M en una superficie horizontal sin fricción, una fuerza horizontal P se aplica en un extremo de la cuerda. Suponiendo que el pandeo de la cuerda es despreciable, calcule: a) la aceleración de la cuerda y el bloque y b) la fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque.



R: a) $a = \dfrac{P}{(m+M)}$

b) $F = \dfrac{P.M}{(m+M)}$

Pb. 3. 18.- Resnick.

Un bloque se suelta del reposo en la parte superior de un plano inclinado y sin fricción de 16 m de largo, llega al fondo 4,2 s después. En el momento en que el primero se suelta, se lanza un segundo bloque hacia arriba del plano desde el fondo, de manera que vuelve al fondo junto con el primero.

a) Calcule la aceleración de cada bloque en el plano inclinado.
b) ¿Cuál es la velocidad inicial del segundo bloque?.
c) ¿Qué altura del plano inclinado alcanza?.

Puede suponer que los dos bloques presenta la misma aceleración.

R: a) 1,8 m/s^2.
b) 3,8 m/s.
c) 4,0 m.

TEMA 4

MOVIMIENTO DEL PROYECTIL – MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

Metodología para resolver problemas de trayectoria de un proyectil:

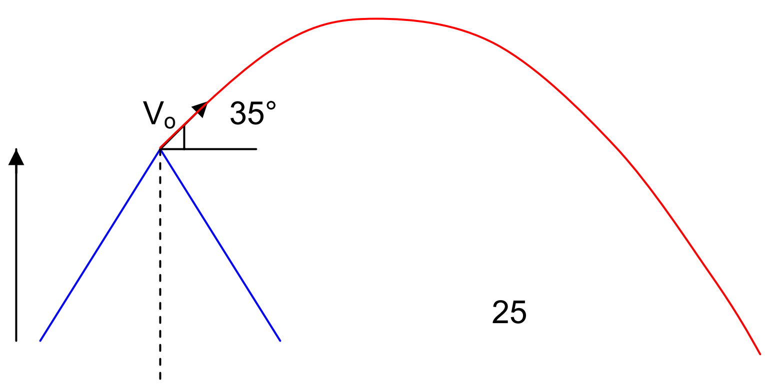
Lo que primeramente se debe realizar es establecer el sistema de coordenadas, dibujando sus ejes, trazar la parábola para un trayecto completo, con el eje horizontal ***x*** y el eje ***y*** hacia arriba, de esta manera tenemos $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $a_x = 0$; y $a_y = 0$.
Una vez trazada la trayectoria, una nueva lectura al enunciado del problema y marcamos las coordenadas donde nos encontramos en la trayectoria parabólica, a partir de allí, marcamos todos los datos que nos serán de utilidad, tanto los dados por el enunciados como los que están implícitamente, como ser cuando alcanza el proyectil su punto más alto $V_{oy} = 0$, y el tiempo de vuelo en ese punto es la mitad del tiempo de vuelo total de la trayectoria completa., también recordar que V_{ox} = constante., o sea que la velocidad horizontal es constante en toda la trayectoria, obviamente no teniendo en cuenta la resistencia del aire, y para la deducción de cualquier fórmula que nos permite encontrar la solución al problema planteado es partiendo de la ubicación de las coordenadas con:

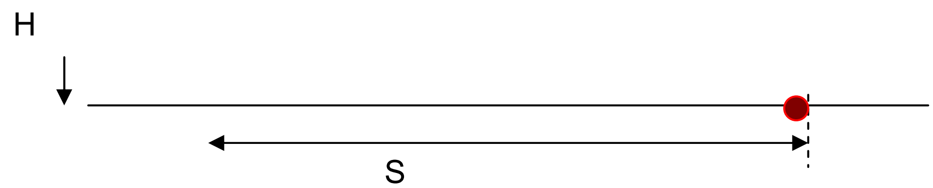
$$h = V_{oy}.t \pm \frac{gt^2}{2} .,\therefore \Rightarrow V_{oy} = V_o.sen\phi$$; para cualquier altura y distancia horizontal.

$$S = V_{ox}.t.,\therefore \Rightarrow V_{ox} = V_o.\cos\phi$$

Pb. 4. 01.-
Durante una erupción volcánica, trozos de rocas sólidas pueden ser arrojados fuera del volcán, en la fig. se muestra el corte de un volcán.,

a) ¿con que velocidad inicial debe ser arrojado un bloque a 35° con respecto a la horizontal desde A para caer a los pies del volcán en el punto B?.
b) ¿cuál es el tiempo de vuelo?.





H = 3,3 km., y S = 9,4 km.

Solución:

Datos: Φ = 35°., H = 3,30 Km., S = 9,4 km.,

Incógnitas: V_o = ? y T_v = ?

Tenemos que la distancia horizontal en la trayectoria de un proyectil es igual a:

$S = V_{0x}.t_v$ donde $V_{0x} = V_0.\cos.\phi$, o sea la componente horizontal de la velocidad, de allí obtenemos el tiempo de vuelo t_v.

$t_v = \dfrac{S}{V_0.\cos.\phi}$ pero aquí no tenemos la Velocidad inicial V_o,

Ahora recurrimos a la otra fórmula que se emplea para determinar la altura:

$h = V_{0y}.t_v - \dfrac{g.t_v^2}{2}$., y reemplazamos t_v y nos queda de la siguiente manera:

$$h = S.tag.\phi - \frac{g.S^2}{2.V_0^2 \cos^2.\phi} \qquad \frac{g.S^2}{2.V_0^2.\cos^2\phi} = S.tag\phi - h.,\therefore \Rightarrow \frac{g.S^2}{2.\cos^2\phi} = (S.tag\phi - h).V_0^2$$

., realizando los pasajes de términos correspondientes obtenemos:

$$V_0 = \sqrt{\frac{g.S^2}{2.\cos^2\phi.(S.tg\phi - h)}}$$

reemplazando numéricamente los datos correspondientes encontramos la V_o, para luego volver sobre la fórmula del t_v y reemplazar la V_o obtenida aquí, de esta manera nuestro problema queda resuelto., también podríamos haber utilizado la siguiente fórmula para obtener en este caso V_o :

$S = V_0^2.sen.(2\phi).$

Pb. 4. 02.-

Demuestre que la altura máxima alcanzada por un proyectil es:

$$H\max. = \frac{(V_0.sen\phi)^2}{2.g}$$

Solución:

Para resolver este problema tenemos que considerar que: la altura ganada en toda la trayectoria es igual a cero y de allí despejamos el tiempo total de vuelo para luego reemplazarlo en la formula general de altura, veamos:

$h = 0 = V_0.sen\phi.t - \dfrac{g.t^2}{2}$., para luego $V_0.sen\phi.t = \dfrac{g.t^2}{2}$., ahora simplificamos el tiempo del primer término con el cuadrado del segundo término y nos queda de la siguiente manera:

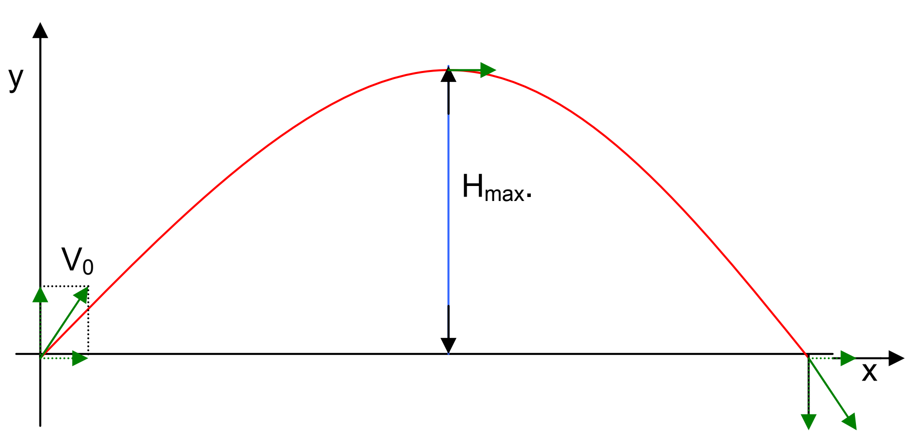
$$t = \frac{2.V_0.sen\phi}{g}$$

para calcular la altura máxima se toma la mitad del tiempo de vuelo total, por lo que:

$$\frac{t}{2} = \frac{V_0.sen\phi}{g} .,\Rightarrow H_{\max.} = V_0.sen\phi\frac{V_0.sen\phi}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{V_0.sen\phi}{g}\right)^2$$

$$H_{\max.} = \frac{V_0^2.sen^2\phi}{g} - \frac{g.V_0^2.sen^2\phi}{2.g^2} .,\Rightarrow H_{\max.} = \frac{(V.sen\phi)^2}{2.g}$$

de esta manera queda demostrado la fórmula de altura máxima.



S_{max}.

Pb. 4. 03.-
Un volcán de una altura H = 2800 metros, lanza horizontalmente un fragmento rocoso con una velocidad inicial V_0 = 15 m/seg. Hallar: a) ¿cuánto tiempo se encontrará el fragmento rocoso en movimiento?., b) ¿a que distancia S de la base del volcán caerá a tierra?., c)¿con que velocidad Vy llegará al suelo?., d) ¿qué ángulo formará la trayectoria del fragmento con el horizonte en el punto de caída?., no debe tenerse en cuenta la fricción con el aire.

R: a) 23,9 seg., b) 358,5 m., c) 234,22 m/seg., d) α = 86° 20'.

Pb. 4. 04.- Sears (modificado).
Un estudiante de Geología se encuentra realizando una practica de verano en el sector Este de La Sierra de Ancasti, y decide regresar a la ciudad Capital, toma su motocicleta y aprovechando la penillanura de la sierra, decide acortar la distancia y tiempo, para lo cual circula a campo traviesa, pero no se da cuenta que llega al borde oeste y se lanza al precipicio, su velocidad en ese instante era de 9,0 m/s, obtenga la posición, distancia desde el borde y la velocidad de la moto después de 0,5 segundo.

R = para su posición horizontal x = 4,5 m.
Para su posición vertical y = - 1,2 m.
Distancia desde el borde (resultante) r = 4,7 m.
Velocidad a los 0,5 segundo: $V_x = V_{ox}$ = 9,0 m/s.
V_y = - 4,9 m/s.
La magnitud de la velocidad (velocidad tangencial) V = 10,2 m/s.
El ángulo que forma con la horizontal en ese instante α = - 29°.

Movimiento Circular Uniforme

Introducción:
Cuando un objeto o partícula se mueve en una trayectoria circular con una velocidad constante, lo que implica una componente de la aceleración perpendicular a la trayectoria, aún cuando la rapidez sea constante, ésta aceleración denominada radial o centrípeta es la causa del cambio de dirección de la velocidad.

La relación de esta aceleración radial con la velocidad es sencilla:

$$a_{rad} = \frac{V^2}{R}$$

También podemos decir que en un movimiento circular, el tiempo de una vuelta completa o revolución, o sea el tiempo necesario para recorrer una longitud igual a la circunferencia y la relación con la velocidad es:

$V = \frac{2.\pi.R}{T}$, donde como podemos observar la longitud de una circunferencia es:

$$L = 2.\pi.R$$

por lo tanto al sustituir en la primera ecuación de la aceleración radial o también llamada centrípeta, queda:

$$a_{rad} = \frac{4.\pi^2.R}{T^2}$$

Pb. 4. 05.

Cual es la aceleración radial que experimenta un clasto bien redondeado que cae de una ladera y adquiere una velocidad de 10 m/seg., al llegar a una canaleta horizontal toma una curva de 25 m de radio.

Solución:

Datos: $V = 10m/seg., R = 25m.$

$$a_r = \frac{V^2}{R}., \Rightarrow a_r = \frac{(10m/seg)^2}{25m} = 4m/seg^2.$$

Pb. 4. 06.-

Un clasto redondeado deslizándose sobre una canaleta circular tiene una velocidad de 9,2 m/seg, sufre una aceleración de 3,8 m/seg^2. a) ¿cuál es el radio de la trayectoria., b) ¿cuánto tiempo le tomará completar el circuito?.

Solución:

Datos: $V = 9{,}2m/seg., a_r = 3{,}8m/seg., \Rightarrow e = 2.\pi.R \therefore R = \frac{V^2}{a_r}.,$

a) $R = \frac{V^2}{a_r} = \frac{(9{,}2m/seg)^2}{3{,}8m/seg^2} = 22.27m.,$

b) $t = \frac{e}{V} = \frac{2.\pi.R}{V} = \frac{2.3{,}14.22{,}7m}{9{,}2m/seg} = 15{,}49seg.$

Pb. 4. 07.-

a)¿Cuánto vale la aceleración centrípeta de un objeto ubicado sobre el ecuador de la Tierra, debida a la rotación de la misma?., b) ¿cuánto debe valer el periodo de rotación de la tierra para que la aceleración centrípeta sea igual a 9,8 m/seg^2?.

R . a) 0,0336 m/s^2.

b) 5063,09 s.

Pb. 4. 08. Resnick.

La Luna gira en torno a la Tierra, completando una revolución en 27,3 días. Suponga que la órbita es circular y que tiene un radio r = 238.000 millas. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ella?.

Solución:

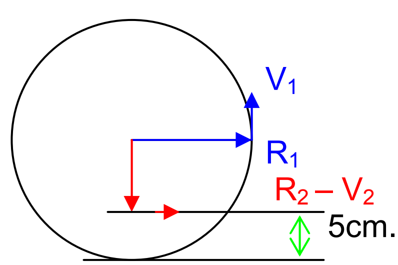
En este caso debemos el dato del radio pasarlo a metro, posteriormente tomar el dato de la masa de la luna de cualquier texto y el tiempo pasarlo a segundos, de esta manera tenemos que:

$V = \frac{2.\pi.r}{T} = 1018\, {}^{m}\!/\!{}_{s}$ entonces tenemos que la segunda ley de Newton nos dice:

$$\sum \vec{F} = m.a = m.\frac{V^2}{r} = \frac{\left(7{,}36x10^{22}\,kg\right)\left(1018\, {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)^2}{3{,}82x10^{8}\,m} = 2{,}00x10^{20}\,N$$

Pb. 4. 09.- Volkenshtein.

Hallar el radio de una rueda giratoria (R_1), sabiendo que la velocidad lineal V_1 de los puntos situados en la superficie de su llanta es 2,5 veces mayor que la velocidad lineal V_2 de los puntos que se encuentran 5 cm más próximos al eje de la rueda (R_2).



R: R_1 = 5,9523 cm.

TEMA 5
IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO - COLISIONES

Metodología para resolver problemas:

Primeramente debemos tener algunos conceptos bien claros como ser: que la cantidad de movimiento de una partícula, es una cantidad vectorial, es el producto de la masa por su velocidad, que la cantidad de movimiento total es constante y se conserva.

Un choque en el que la energía cinética total se conserva es un choque elástico. Si la energía cinética no se conserva, el choque es inelástico, aunque la energía total del sistema se conserva (ya sea que la energía cinética se transforme en energía potencial en algunos casos y en otros pase a energía potencial elástica, por ejemplo).

El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo o sistema es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre él.

En algunos textos como el Resnick denomina a la cantidad de movimiento: **ímpetu**, o en otros casos como **momentum**.

El impulso como el ímpetu derivan de la segunda ley de Newton: $\sum F = m.a.,\Rightarrow \sum F = m\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}.(m.V)$

$m.V = p$ = cantidad de movimiento o ímpetu.

$F.dt = J$ = impulso ., $J = p_2 - p_1$ = teorema del impulso - cantidad de movimiento.

El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo durante ese intervalo.

La diferencia entre la cantidad de movimiento con la energía cinética, es que la cantidad de movimiento o ímpetu es un **vector** proporcional a la velocidad, mientras que la energía cinética es un **escalar** proporcional al cuadrado de su rapidez.

El ímpetu o cantidad de movimiento de un cuerpo es igual al impulso que lo aceleró desde el reposo a su rapidez actual.

Con estas consideraciones generales pasamos a la conservación de la cantidad de movimiento siempre y cuando se conserve. Si no es así no podemos usarlo.

Una vez definido el problema en cuestión pasamos a definir el sistema de coordenadas mas conveniente, tratando que el eje ***x*** coincida con la dirección de una de las velocidades iniciales.

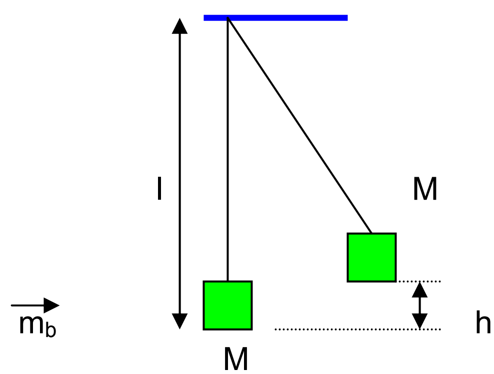
Posteriormente escriba una ecuación para la componente ***x*** inicial de la cantidad de movimiento igualando con la componente ***x*** final (o sea igualar la cantidad de movimiento antes con la cantidad de movimiento posterior a la interacción)., luego escriba otra ecuación para la componente del eje ***y***., para cada partícula. Es muy importante tener en cuenta que las componentes de las velocidades para cada eje nunca se suman en la misma ecuación., y siempre tener especial cuidado con los signos, que aunque estén en el mismo eje estas pueden ser positivas o negativas.

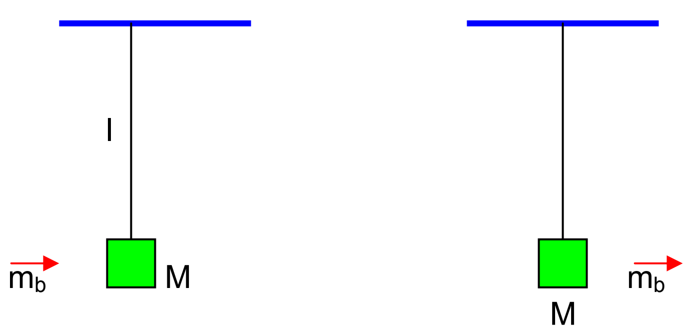
Problemas:

Pb. 5. 01.- Una bala que pesa 0,01(lbf) se dispara contra cierto bloque de madera que pesa 2 (lbf) suspendida de una cuerda de 5 ft de longitud. Se observa que el centro de gravedad del bloque se eleva a una altura de 0,0192 ft. Hállese la velocidad de la bala cuando sale del bloque, si su velocidad inicial era de 1000 ft/seg.

Solución:

Datos:
$$P_b = 0{,}01[lbf],$$
$$P_M = 2[lbf]$$
$$l = 5[ft]$$
$$h = 0{,}0192[ft]$$
$$V_b = ?$$
$$M_b = 1000\left[{}^{ft}\!/_{seg}\right]$$





(1) (2)

Entre las posiciones (1) y (2) no hay intervención de las fuerzas externas al sistema de la componente de la gravedad del bloque M, por eso la impulsión exterior vale cero (0), y se conserva la cantidad de movimiento del sistema.

$$\int \vec{F}.dt = \Delta p = 0 \qquad\qquad m_b.V_{1b} + m_M.V_{1M} = m_b.V_{2b} + m_M.V_{2M}$$

(1) (2)

tenemos que $m_M.V_{1M} = 0$

entonces es: $P_b.V_{1b} = P_b.V_{2b} + P_M.V_{2M}$

como podrá observar que dividimos todos los miembros por g (gravedad) para trabajar directamente con los pesos.

con la energía cinética que adquiere M (en 2), es capaz de aumentar su energía potencial, desde 0, en (2) hasta que se eleva (h), que vale:

$$\Delta E_p = P_M.h - 0 = P_M.h$$

Esta conservación de la Energía mecánica se debe a que desde (2) hasta la elevación en h, la única fuerza que actúa sobre M es la conservación de gravedad. Resulta entonces:

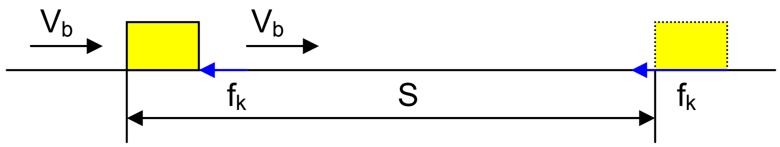
a)
$$\frac{1}{2}.m_M.V_M^2 = P_M.h$$
$$V_M = \sqrt{\frac{2.P_M.h}{m_M}} = \sqrt{2.g.h}$$

a esta velocidad del bloque la sustituimos en la ecuación de la cantidad de movimiento y tenemos:

$$P_b.V_{1b} = P_b.V_{2b} + P_M.\sqrt{2.g.h}$$
$$entonces \Rightarrow V_{2b} = V_{1b} - \left(\frac{P_M}{P_b}\right).\sqrt{2.g.h}$$
$$V_{2b} = 1000\left(\frac{ft}{seg}\right) - \frac{2}{0{,}01}.\sqrt{2.32\left[\frac{ft}{seg}\right].0{,}0192[ft]} = 778\left[\frac{ft}{seg}\right]$$

Pb. 5. 02.- Una bala de 5,0 gr, que se mueve horizontalmente a una velocidad de 100m/seg., choca y se incrusta en un bloque de 20 Kg, colocado sobre una mesa plana. El bloque se desliza 2,0 m, después de la colisión, antes de llegar al reposo. Encuentre: a) la velocidad del bloque después de la colisión.

b) la fuerza de fricción que retarda el movimiento del bloque.



Datos:

$$S = 2{,}0[m]$$
$$m_b = 5{,}0[g]$$
$$v_b = 100\left[\frac{m}{seg}\right]$$
$$m_B = 20[kg]$$
$$V_B = ?$$
$$f = ?$$

$$m_b v_b + 0 = (m_b + m_B).V_b$$

$$V_B = v_b.\left(\frac{m_b}{m_B + m_b}\right) = 0{,}025\,\frac{m}{seg}$$

ahora bien:

$$S = V_B.t - \frac{1}{2}a.t^2$$

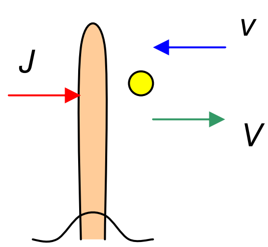
$$0 = V_B - a.t; \Rightarrow t = \frac{V_B}{a}$$

$$S = V_B.\frac{V_B}{a} - \frac{1}{2}a.\frac{V_B^2}{a^2} = \frac{V_B^2}{2.a}$$

$$a = \frac{f}{m_B} = \frac{V_B^2}{2S}.,\therefore \Rightarrow f = m_B.\frac{V_B^2}{2.S} = 20[kg].\frac{(0{,}025)^2\left[\frac{m^2}{seg^2}\right]}{2.2[m]} = 0{,}003[N]$$

Pb. 5. 03.- Una pelota de 500gr, se aproxima a un bate a una velocidad de 30 m/seg, y después de chocar regresa a lo largo de la misma línea con la misma velocidad. ¿de que magnitud fue el impulso ejercido por el bate contra la bola?.

Solución:



Datos:

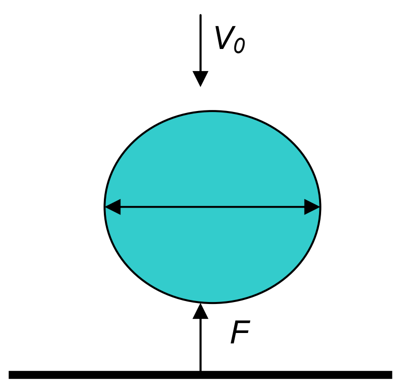
$$m = 500[gr] = 0,5[kg]$$
$$v = 30\left[{}^{m}\!/_{seg}\right]$$
$$V = 30\left[{}^{m}\!/_{seg}\right]$$
$$J = ?$$

$$J = \int \vec{F}.dt = \Delta(m.V)$$
$$J = m[V - (-v)] = m(V + v) = 0,5[kg].2.30\left[{}^{m}\!/_{seg}\right] = 30[N.seg]$$

Como podemos observar, la variación de cantidad de movimiento es la resta de la cantidad de movimiento final menos la inicial. Como elegimos positivo a la derecha, entonces la velocidad inicial es negativa, y de allí es que tenemos que el resultado final es la suma de las cantidades de movimiento que nos da el impulso ejercido. Las dimensiones aquí están dada en ***N.seg***, que es lo mismo que ***kg.m/seg***.

Pb. 5. 04.- Una gotita de lluvia de 4,05 mgr., que cae a una velocidad de 20 m/seg., choca contra un plano liso horizontal de una lutita y se detiene. Considerando que la gotita se detiene a una distancia igual a su diámetro, encuentre la fuerza media que ejerce sobre el plano de la lutita.

Solución:



Datos:

$$m = 4{,}0[mgr].,V_0 = 20\left[m/_{seg} \right].,V = 0.,F = 0$$

$$Volumen = v = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \pi.\frac{d^3}{6}.,\therefore\ densidad = \rho = 1000\left[mgr/_{cm^3} \right]$$

$m = \rho.v$., la masa es igual a la densidad por volumen.

$$m = \frac{\pi.d^3}{6}.\rho.,\therefore\ d = \sqrt[3]{\frac{6.m}{\pi.\rho}} = 0{,}197[cm]$$

recorre d (distancia = diámetro) hasta detenerse

$$d = V_0.t - \frac{1}{2}.a.t^2.,\Rightarrow d = \frac{V_o^2}{a} - \frac{V_o^2}{2.a} = \frac{V_o^2}{2.a}$$

$$0 = V_0 - a.t.,\Rightarrow t = \frac{V_0}{a}$$

como: $J = \int \vec{F}.dt = \Delta(m.V)$

la aceleración producida por $\vec{F}$ es:

$a = \frac{V_0^2}{2.d}$ el tiempo en detenerse es: $t = \frac{V_0}{V_0^2/_{2.d}} = \frac{2.d}{V_0}$

la impulsión de $\vec{F}$ es:

$$J = \vec{F}.t = 0 - m.V_0.,\therefore\Rightarrow \vec{F} = -\frac{m.V_0}{2.d/_{V_0}} = -\frac{m.V_0^2}{2.d}$$

la fuerza que impulsa a la gota a detenerse vale: $\vec{F} = -m\frac{V_0^2}{2.d}$

por la tercera ley de Newton, igual fuerza pero de sentido contrario, golpea la superficie que detiene la caída, que vale:

$$\vec{F} = 0{,}004[gr].\frac{(20)^2\left[{m^2}/{seg^2}\right]}{2.0{,}20[cm]}.\frac{10^4[cm^2]}{1[m^2]} = 40.620[dinas] = 0{,}41[N] = 41grf.$$

A los fines de poder abordar los problemas de Colisiones, pasaremos a ver algunas consideraciones importantes:
Para una colisión elástica la Energía Cinética se conserva, y considerando las ecuaciones del ímpetu como la de la Energía Cinética, obtenemos:

$V_{1i} + V_{1f} = V_{2f} + V_{2i}$., donde:
V_{1i} = velocidad inicial de la masa 1., y $V_{1f} =$ Velocidad final de la masa 1.
$V_{2i} =$ velocidad inicial de la masa 2., y $V_{2f} =$ velocidad final de la masa 2.

Para obtener las velocidades finales de ambas masas a partir de sus velocidades iniciales es:

$$V_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).V_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right).V_{2i}$$

$$V_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right).V_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right).V_{2i}$$

estas ecuaciones nos permiten obtener las velocidades finales en cualquier colisión elástica unidimensional (Resnick).

$$\begin{array}{l} V_{1f} = V_{2i} \\ V_{2f} = V_{1i} \end{array}$$ estas se corresponde cuando las masas son iguales $(m_1 = m_2)$

otro caso es cuando la segunda partícula se encuentra en reposo inicialmente, entonces:

$$V_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).V_{1i}$$

y

$$V_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right).V_{1i}$$

Para colisiones inelásticas, en las que por definición la energía cinética no se conserva, aunque la conservación de la cantidad de movimiento (ímpetu) siempre se cumple.

En un caso de la colisión completamente inelástica, las partículas se mueven en una velocidad final común, o sea que se quedan pegadas después de la colisión. Por lo tanto tenemos:

$$V_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right).V_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right).V_{2i}$$

cuando m_2 se encuentra en reposo, esta ecuación queda:

$$V_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right).V_{1i}$$

esta ecuación nos muestra que cuando mas grande sea m_1, más rápido se moverá la combinación.

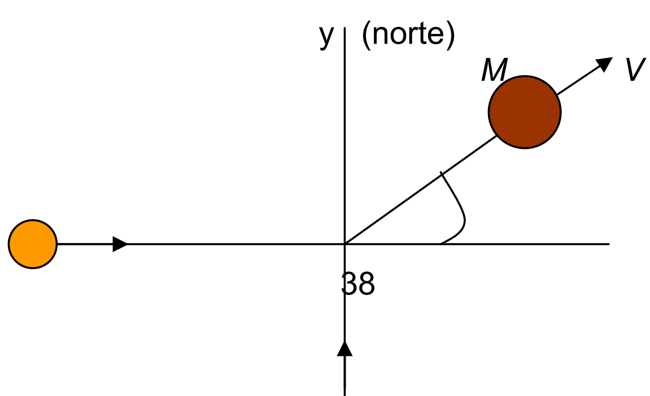
Con estas consideraciones pasamos a resolver algunos problemas.

Pb. 5. 05.- Resnick.
Se cree que el Meteor – Crater, en Arizona, (EEUU), se formo por el impacto de un meteorito con la Tierra hace unos 20.000 años., la masa del meteorito se calcula que fue de $5x10^{10}[kg]$, y su velocidad en $7,2\left[{km}/{seg}\right]$. ¿qué velocidad impartiría a la Tierra tal meteorito en una colisión frontal?.

R = $\cong 2\left[{mm}/{año}\right]$

Pb. 5. 06.- Dos rodados que se desprenden de una ladera se deslizan hacia un valle y chocan en una superficie de hielo en una colisión completamente inelástica, ya que ambos rodados quedan unidos después del impacto, el rodado de masa m1 = 10kg., se movía originalmente hacia el este a una velocidad V1 = 4,1 km/h, el segundo rodado de masa m2 = 6kg., se movía originalmente hacia el norte a una velocidad V2 = 6,1 km/h., a)¿cuál es la velocidad final de los dos rodados luego del impacto?., b)¿ cual es el cambio fraccionario en la Energía Cinética de los rodados a causa de la colisión?.

Solución:



m_A V_A Φ x (este)

V_B

m_B

como la cantidad de movimiento (ímpetu) se conserva, se escriben las ecuaciones para ambos ejes.

$$m_A.V_{Ax} = M.V.\cos\phi.,$$
$$m_B.V_{By} = M.V.sen\phi$$
$$M = m_A + m_B$$

de donde obtenemos: $\tan\phi = \dfrac{m_{B.}.V_{By}}{m_A.V_{Ax}}$., de donde se obtiene el valor del ángulo.

$V = \dfrac{m.V_{By}}{M.sen\phi}$., reemplazando los valores obtenemos la velocidad final.

La Energía Cinética inicial es: $K_i = \frac{1}{2}m_A.V_A^2 + \frac{1}{2}m_B.V_B^2$

La Energía Cinética final es: $K_f = \frac{1}{2}M.V^2$

La fracción de la Energía Cinética que pregunta el problema es:

$f = \dfrac{K_f - K_i}{K_i}$., reemplazando los valores correspondiente obtenemos la Energía Cinética que se pierde en la colisión.

Pb. 5. 07.- Un peso de 2,9 Tn que cae desde una distancia de 6,5 ft., se hunde 1,5 in., en un montón de Tierra de 0,5 Tn., suponiendo que la colisión. Peso-montón de Tierra, completamente inelástica, halle la fuerza promedio de resistencia ejercida por la Tierra.

Solución:

$$P_1 = 2,9Tn$$
$$h = 6,5\,ft.$$
Datos: $x = 1,5in$
$$P_2 = 0,5Tn$$
$$\vec{F} = ?$$

Primeramente debemos utilizar las ecuaciones ya conocidas para despejar la velocidad aproximada con la cual se aproximo al montón de Tierra.

$$V_f = 0$$

$$0 = V_0 - a.t.,\therefore \Rightarrow t = \frac{V_0}{a}.,pero \Rightarrow V_f^2 = V_0^2 + 2.a.x.,.ahora \Rightarrow a = \frac{V_0^2}{2.x}$$

$$F.t = \Delta m.V.,\therefore \Rightarrow F = \frac{\Delta m.V}{t} = \frac{m.V_0}{2.x/V_0} = \frac{m.V_0^2}{2.x}$$

Pb. 5. 08.- En una tormenta de granizo, cada uno de ellos tiene un diámetro de 1.0 cm a una velocidad de 25 m/seg. Se estima que hay 120 granizos por metro cúbico de aire. Despréciese el rebote del granizo al chocar., a) ¿cuál es la masa de cada granizo., b) ¿qué fuerza es ejercida por el granizo sobre un estrato de plano de 10m x 20 m., durante la tormenta?, supóngase que, siendo hielo, 1 cm^3 de granizo tiene una masas de 0,92 gr.

Solución:
$$d = 1cm$$
$$v = 25\,m/seg$$
$1m^3 = 120granizos$ volumen del granizo: $V = \frac{\pi.d^3}{6} = 0,523cm^3$
$$m_{granizo} = ?$$
$$F = ?$$

$$1cm^3 ------0.92gr$$
$$0,523cm^3 --- 0,481gr.$$

a) la masa de cada granizo es de: 0,481 gramos.

Como dice el enunciado que hay 120 granizo por metro cúbico, y pregunta que fuerza media ejerce durante la tormenta una superficie de 0,02 metros cuadrados, y como si hay 120 granizos en una superficie de 10.000 centímetros cuadrados, en una superficie de 200 centímetros cuadrados hay 2,4 granizos, por lo tanto tenemos que:

$$F.dt = \Delta m.v = 0 - m.v.,\therefore \Rightarrow \vec{F} = \frac{m.v}{t}$$

pero como el tiempo $t = \frac{v}{a}.,sale \Rightarrow 0 = v - a.t$., pero la aceleración esta dada por la ecuación:

$d = v.t - \frac{1}{2.}a.t^2$., distancia del diámetro del granizo, donde reemplazamos el tiempo con la ecuación que antecede, obteniendo: $a = \frac{v^2}{2.d}.,\Rightarrow t = \frac{2.d}{v}$

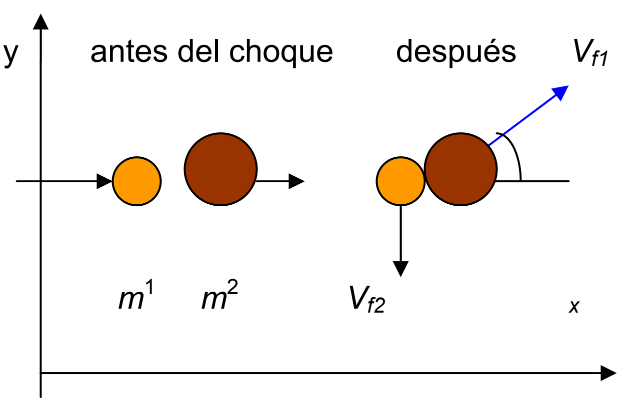
por lo tanto la fuerza media ejercida sobre el estrato plano es:

$$\vec{F} = \frac{m.v^2}{2.x} = 36[N]$$

Pb. 5. 09.- Un fragmento rocoso de 100 gr, se encuentra en reposo sobre un plano de filita horizontal lisa, un segundo fragmento rocoso de masa 2,5 gr., esférico se desliza por una ladera adyacente a la filita y adquiere una velocidad de 400 m/seg, al llegar al plano horizontal, golpea al otro fragmento rocoso y rebota horizontalmente en una dirección perpendicular a la inicial con una velocidad de 300 m/seg., a) calcúlense la magnitud y dirección de la velocidad del primer fragmento luego de haber sido golpeado este., b) ¿es el choque perfectamente elástico?.

Solución:

Datos:
$$\begin{aligned} m_1 &= 100[gr] \\ V_{01} &= 0 \\ m_2 &= 2{,}5[gr] \\ V_{02} &= 400\left[{}^{m}\!/\!{}_{seg}\right] \\ \alpha_0 &= 90^0 \\ V_{f2} &= 300\left[{}^{m}\!/\!{}_{seg}\right] \\ a)V_{f2} &= ?.,b)E = 0? \end{aligned}$$



Si la superficie sobre la que deslizan los dos fragmentos rocosos es horizontal, significa que no hay ninguna componente de los pesos de m1 y m2 que puedan impulsar a este sistema, pues la fuerza de gravedad es una fuerza exterior a este sistema. También no hay fuerza exterior de rozamiento, pues la superficie es lisa, así que el sistema conserva su cantidad de movimiento, por no haber impulsión de ninguna fuerza exterior.

Antes del choque tenemos únicamente que el 1er. fragmento se mueve y lo hace sobre el eje x, por lo tanto la cantidad de movimiento le corresponde a ese cuerpo y sobre el eje x., por lo que la ecuación queda como sigue:

$m_2.V_{02} = m_1.V_{f-1}.\cos.\alpha$ (1)

también en la dirección del eje y, antes del choque la velocidad es igual a cero, y después del choque es:

$0 =$., de aquí se tiene: $0 = -m_1.V_{f1}.f.sen\alpha. + m_2.V_{f2}$ (2)

dividiendo la ecuación (2) en la (1), obtenemos:

$$\frac{V_{f2}}{V_{02}} = tag.\alpha$$

$$\alpha = arc.tag.\frac{300}{400} = 36^0 52\ '12''$$

una vez obtenido el ángulo procedemos a calcular la velocidad faltantes:

$V_{f1} = \dfrac{m_2.V_{f2}}{m_1.sen\alpha}$., colocando los valores correspondiente obtenemos que

$$V_{f1} = 12{,}5\left[{}^{m}\!/\!_{seg}\right]$$

La energía Cinética es $E = \dfrac{1}{2}m.V_{02}^2$

Y la energía final:

$$E_{kf} = \frac{1}{2}m_2.V_2^2 + \frac{1}{2}m_1.V_1^2$$

Si el choque era perfectamente elástico:

$$E_{k0}=\frac{1}{2}.2,5.(400)^2=200,\,joule$$

$$E_{kf}=\frac{1}{2}.2,5.(300)^2+\frac{1}{2}.100.(12.5)^2=120,32[joule]$$

$$\frac{\Delta E}{E_{k0}}=\frac{120,32-200}{200}=-40\%$$

ha habido una pérdida de un 40% de Energía, entonces el choque no fue perfectamente elástico.

Pb. 5. 10.- En una exploración a la Antártida, dos estudiantes de Geologías están recogiendo muestras de rocas, uno de ello que pesa 70Kgf., está parado en un banco de hielo, y le tira a su compañero una muestra que pesa 3(kgf) en dirección horizontal con una velocidad de 8m/seg., Hallar hasta qué distancia retrocederá el estudiante al lanzar la muestra, sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre los patines y el hielo es igual a 0,02.

Solución:

Datos:

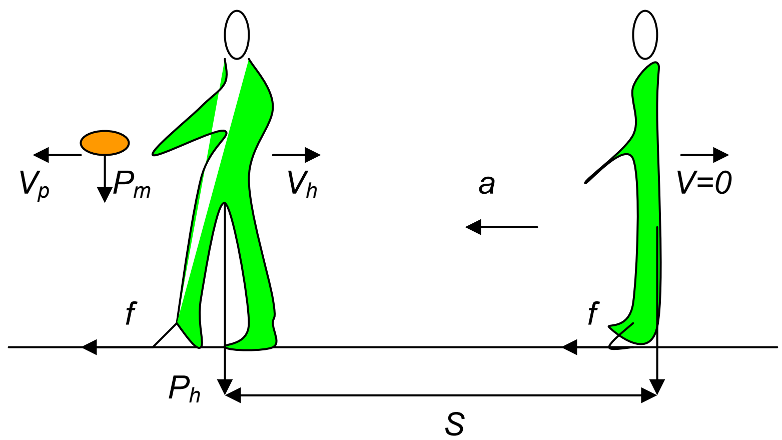
$$P_H=70[kgf]$$

$$P_m=3[kgf]$$

$$V_p=8\left[{}^{m}\!/_{seg}\right]$$

$$S=?$$

., μ= 0,02



Como en el movimiento uniformemente acelerado, tenemos que:

$$S=V_H.t-\frac{1}{2}.a.t^2$$

$$0=V_H-a.t.,\Rightarrow t=\frac{V_H}{a}$$

$$S=\frac{V_H^2}{a}-\frac{1}{2}.a.\frac{V_H^2}{a^2}=\frac{V_H^2}{2.a}$$

$$rozamiento=f=\mu.P_H$$

$$S=\frac{V_H^2}{2g}.\frac{P_H}{f}$$

por la segunda ley de Newton:

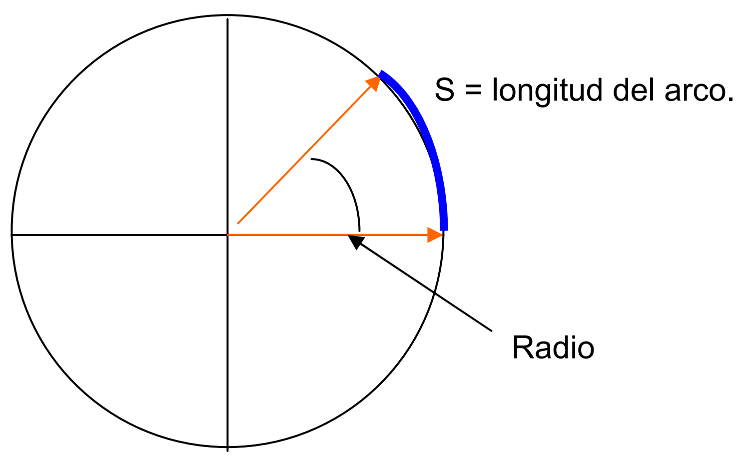
$$a=\frac{f}{m}=\frac{f}{P_H}.g$$

al arrojar la muestra se conserva la cantidad de movimiento del sistema:

$0 = m_H.V_H + m_m.V_m .,\therefore \Rightarrow V_H = -V_m \frac{m_m}{m_H} = -V_m \frac{P_m}{P_H}$.,Ya sabemos que $\vec{V}_m \, y \vec{V}_H$ son de sentido contrario, entonces es: $S = \frac{V_m^2}{2.g.\mu} \left(\frac{Pm}{P_H} \right)^2 = \frac{8^2}{2x9{,}81x0{,}02} \left(\frac{3}{70} \right)^2 = 0{,}30[m]$

TEMA 6
CINEMATICA ROTACIONAL

Introducción: A los fines de poder comprender la medición del ángulo y como se lo expresa en un movimiento de rotación, pasaremos a realizar un repaso de las unidades:



Θ = S/R., siendo S = longitud del arco.

El ángulo es igual a la longitud del arco dividido por el radio.
El radian por ser la razón de dos longitudes es un miembro puro y no tiene dimensiones.

La circunferencia de un círculo de radio **R** es **2.π.R**, así de esta manera tenemos que:

1 Revolución = 1 Vuelta = 2.π.Radianes = 360^o

también podríamos decir que:

1 radián = $360^o/6,28 = 57,3^o$

Lo que podemos decir es que un arco de longitud igual al radio corresponde a un ángulo de $57,3^o$

Ahora bien:
1 Rev. = 2 x 3,14 radianes = 6,28 radianes.

1 Radian = 1 Rev./6,28 = 0,59 Rev.

Como podemos observar que el arco de longitud igual al radio se denomina: Radián.,

Ahora bien pasemos a realizar algunas operaciones para poder comprender mejor.

10 Rev. = 2πR.N°Rev = 6,28 Rad. 10 = 62,8 radianes.

También podríamos decir que: en una revolución, o sea una vuelta, o bien en una circunferencia caben 6,28 veces el radio de esa circunferencia, o bien 2π radianes.

Esta relación de la cantidad de veces que cabe el radio en una circunferencia es válido para todo tamaño de circunferencia.

Para una velocidad angular, en ocasiones se mide en **rpm** , lo que significa: revoluciones en un minuto, o en otras palabras vueltas en un minuto, para tener la cantidad de vueltas o revoluciones en un segundo se tiene que dividir por 60., como ejercicios de práctica tenemos:

11,7 radianes pasar a revoluciones

1 rev. $\longrightarrow$ 6,28 radianes
x $\longrightarrow$ 11,7 radianes

x = 11,7/6,28 = 1,863 rev.., o sea que 11,7 radianes es equivalente a 1,863 rev.

Ahora bien la velocidad angular se mide en radianes sobre segundo, o revoluciones sobre segundo, por lo tanto para pasar de un sistema a otro se procede de la misma manera:

Pb. 6. 01.- Un vehículo se desplaza en la carretera a una velocidad de 50 ft/seg. Si el diámetro de sus ruedas es de 36 in (pulgadas)., ¿ con que velocidad giran las ruedas, en revoluciones por segundo, radianes por segundo y grados por segundo?.

Solución: $V = 50\left[{}^{ft}\!/\!{}_{seg}\right].,$
$d = 36[in]$

$$w = \frac{V}{r}.,\rightarrow r = \frac{d}{2}$$

$$w = \frac{2.V}{d} = \frac{2.50\left[{}^{ft}\!/\!{}_{seg}\right]}{36[in].\left[\frac{1ft}{12in}\right]} = \frac{2.50.12}{36} = 33{,}33\left[\frac{rad}{seg}\right]$$

$$w = 33.33\left[\frac{rad}{seg}\right].\frac{1[rev]}{2.\pi[rad]} = 5{,}3\left[\frac{rev}{seg}\right]$$

$$w = 33{,}33\left[\frac{rad}{seg}\right].\frac{180°}{\pi[rad]} = 1910\left[{}^{\circ}\!/\!{}_{seg}\right]$$

como se podrá observar tiene aquí todas las equivalencias para una misma velocidad angular. Ahora bien pasemos a ver las fórmulas que se emplean en rotación de un cuerpo rígido y sus analogías con el movimiento de traslación:

Movimiento de traslación (dirección fija)	Movimiento de rotación (eje fijo)
$V = V_0 + a.t$	$w = w_0 + \alpha.t$
$x = x_0 + V_0.t + \frac{1}{2}a.t^2$	$\phi = \phi_0 + w_0.t + \frac{1}{2}.\alpha.t^2$
$V^2 = V_0^2 + 2.a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2.\alpha(\phi - \phi_0)$
$x = x_0 + \frac{V_0 + V}{2}.t$	$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2}.t$
$x = x_0 + V_0.t - \frac{1}{2}.a.t^2$	$\phi = \phi_0 + \omega_0.t - \frac{1}{2}.\alpha.t^2$

METODOLOGÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS

Como podemos observar en las fórmulas anteriores existe una analogía entre el movimiento rectilíneo y la rotación de un cuerpo rígido, por supuesto que estas fórmulas solamente son válidas siempre que la aceleración sea constante, ya sea para la aceleración lineal o para la aceleración angular. La relación que existe entre la rapidez lineal y la angular es la siguiente:

$$V = r.\omega., \Rightarrow a_{rad} = \frac{V^2}{r} = \omega^2.r$$

aquí la relación existente para la **aceleración radial** o

$$a_{\tan g.} = \frac{dV}{dt} = r.\frac{d\omega}{dt} = r.\alpha$$

también llamada centrípeta de un punto de un cuerpo en rotación, como la correspondiente a la **aceleración tangencial** de un punto de un cuerpo en rotación.

Al usar las ecuaciones, se deben expresar los ángulos en radianes, no en revoluciones ni en grados.

Cuando necesitamos utilizar la relación del Trabajo y la Energía y la conservación de la Energía, la diferencia que tenemos en un cuerpo en rotación es que la Energía Cinética de Rotación se expresa en función del Momento de Inercia "I" y de la velocidad angular ω, del cuerpo ($K = \frac{1}{2}I.\omega^2$) en lugar de la masa m y su rapidez V. Otra cuestión importante es que cuando se trata de una cuerda o cable enrollada en un cuerpo rígido giratorio que funciona como polea, hay que tener en cuenta que el punto de la polea (cuerpo rígido) que toca la cuerda tiene la misma velocidad lineal que la cuerda, en tanto que no se deslice o resbale sobre la polea., por lo tanto en esos casos podemos ayudarnos relacionando la velocidad lineal y la aceleración tangencial de un punto del cuerpo rígido con la velocidad y aceleración angulares del mismo.

Pb. 6. 02.- a)¿Qué aceleración angular promedio se requiere para obtener una velocidad de 1 [rev], cada 20 [seg], para una rueda que arranque del reposo y alcanza esta velocidad en 0,5 [min]?., b)¿Cuál tendría que ser el radio de la rueda para que la aceleración centrípeta que actúa sobre una persona en la rueda sea un décimo de la aceleración de la gravedad, cuando la rueda haya alcanzado la velocidad indicada?.

Solución:

a)
$$\alpha = ?$$
$$\omega_n = \frac{1}{20}\left[{}^{rev}\!/\!{}_{seg}\right]$$
$$\omega_0 = 0$$
$$t = \frac{1}{2}[\min.]$$

b)
$$R = ?$$
$$a_{rad} = {}^{g}\!/\!{}_{10}$$

la velocidad angular alcanzada en el tiempo t., es:

$$\omega = \alpha.t.,\Rightarrow \omega\left[\frac{rad}{seg}\right] = \omega_n\left[\frac{rev}{seg}\right].\frac{2\pi[rad]}{1[rev]} = 2.\pi.\frac{1}{20} = 0,13\left[{}^{rad}\!/_{seg}\right]$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi\frac{1}{20}\left[{}^{rad}\!/_{seg}\right]}{\frac{1}{2}[\min].\frac{60[seg]}{1[\min]}} = \frac{\pi}{300} = 0,0105\left[{}^{rad}\!/_{seg^2}\right]$$

b) $a = \frac{V^2}{R} = \omega^2.R = \frac{g}{10}.,\therefore\Rightarrow R = \frac{g}{10.\omega^2} = 9,94[m]$

Pb. 6. 03.- Sears.
Un volante cuya aceleración es constante e igual a 2(rad/s^2), gira un ángulo de 100 (rad) en 5(s).¿Cuánto tiempo ha estado en movimiento antes de comenzar el intervalo de 5 (s), si partió del reposo?.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\theta = \theta_0 + \omega.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha.t\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\theta_0 = 0 \\ \omega_0 = 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\omega = \alpha.t_0 \\ \theta = \alpha.t_0.t + \frac{1}{2}.\alpha.t^2\end{array}\right\} \; t_0 = \frac{\theta - \frac{1}{2}\alpha.t^2}{\alpha.t}$$

haciendo distributiva queda: $t_0 = \frac{\theta}{\alpha.t} - \frac{t}{2} = \frac{100[rad]}{2\left[{}^{rad}\!/_{s^2}\right]5[s]} - \frac{5[s]}{2} = 7,5 segundos$

Pb. 6. 04.- Sears.
Un volante acelera uniformemente a partir del reposo hasta alcanzar una velocidad angular de 900 (rev/min) en 20 (s). Hállese al cabo de 1 (s): a) el ángulo girado por el volante; b) calcúlense y represéntense en un diagrama el valor y la dirección de las componentes tangencial y normal de la aceleración de un punto del volante que dista 6(in) del eje.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\omega = \omega_0 + \alpha.t \\ \theta = \omega_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\omega_0 = 0 \\ \alpha = \frac{\omega}{t}\end{array}\right\} \; \theta = \frac{1}{2}\alpha.t^2$$ reemplazando: $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{t}\right).t^2 = \frac{\omega.t}{2}$

donde es $\omega\left(\frac{rad}{s}\right)=n\left(\frac{rev}{\min}\right).\frac{2.\pi(rad)}{1(rev)}.\frac{1(\min)}{60(s)}=\frac{2.\pi.n}{60}$

$\theta=\frac{1}{2}.\frac{2.\pi.n}{60}.t=\frac{\pi.n}{60}.t=47{,}1(rad)$ para el ángulo recorrido desde el inicio hasta los 20 seg., ahora calculamos el punto a):

$$\left.\begin{aligned}\Delta\theta&=\omega.\Delta t_a+\frac{1}{2}\alpha.\Delta t_a^2\\ \omega&=\alpha.t.,\Rightarrow\alpha=\frac{\omega}{t}\end{aligned}\right\}\quad \Delta\theta=\omega.t\Delta t_a+\frac{1}{2}\frac{\omega}{t}.\Delta t_a^2=\omega.\Delta t_a\left(1+\frac{\Delta t_a}{2.t}\right)=\frac{2.\pi.n}{60}.\Delta t_a\left(1+\frac{\Delta t_a}{2.t}\right)$$

$$\Delta\theta=\frac{2.\pi.900}{60}.1.\left(1+\frac{1}{2x20}\right)=96{,}6(rad)$$

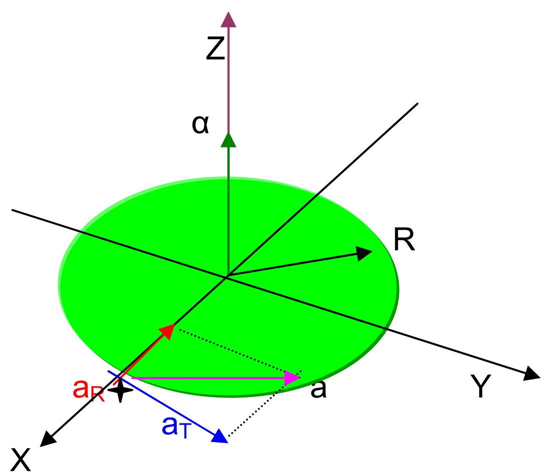
b) $\omega=\frac{2.\pi.n}{60}=94{,}2\left[{}^{rad}\!/_{s}\right]$

$$a_r=\frac{v^2}{R}=\omega^2.R=(94{,}2)^2\left[\frac{1}{s^2}\right].6(in).\frac{0{,}0254(m)}{1(in)}=1353{,}7\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_t=\alpha.R=\frac{\omega}{t}.R$$

$$a_t=0{,}7\left[{}^{m}\!/_{s^2}\right]$$

$$a_r\rangle\rangle a_t$$

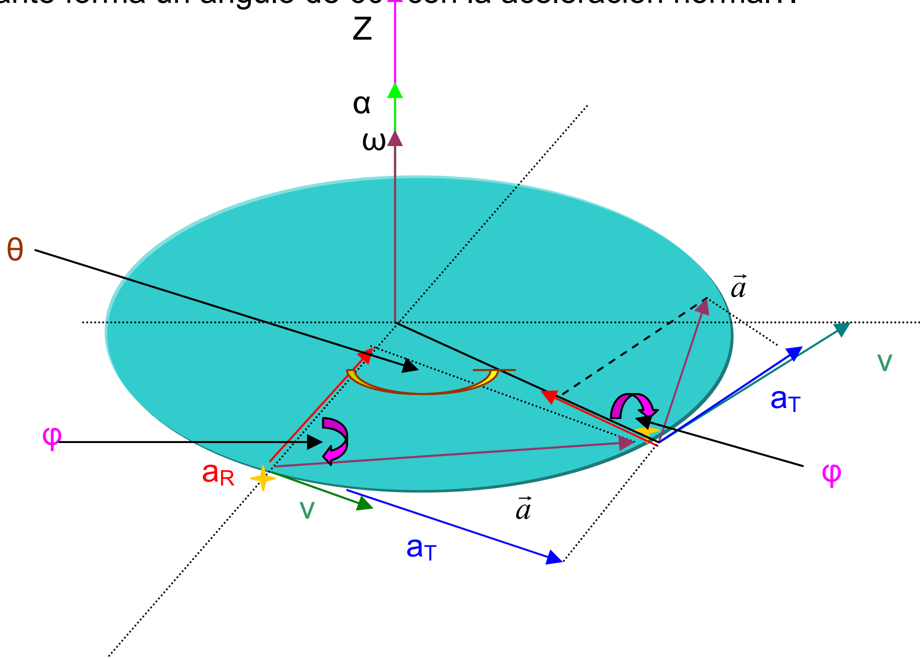


Cuando el ángulo formado entre el vector aceleración y la aceleración radial tiende a cero, el vector aceleración casi coincide con la aceleración tangencial.

Pb. 6. 05.- Sears.

a) demuéstrese que, cuando un cuerpo parte del reposo y gira alrededor de un eje fijo con aceleración angular constante, la aceleración normal de un punto del cuerpo es directamente proporcional a su desplazamiento angular., b)¿Qué ángulo habrá girado el cuerpo cuando la aceleración resultante forma un ángulo de 60° con la aceleración normal?.

Solución:



a) $a_R = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2.R$ $\qquad\qquad$ $\omega_0 = 0.,\therefore\Rightarrow \alpha = cte.,\therefore\Rightarrow a_R = k.\theta$

para $v_0 = 0;\Rightarrow \omega_0 = 0$ tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \alpha.t \\ \theta &= \frac{1}{2}\alpha.t^2 \end{aligned}\right\} \quad t = \frac{\omega}{\alpha}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha.\frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{\omega^2}{2.\alpha}.,\therefore\Rightarrow \omega^2 = 2.\alpha.\theta$$

sustituyendo: $a_R = 2.\alpha.\theta.R = (2.\alpha.R).\theta$ $\qquad$ resulta que: $k = 2.\alpha.R$

$a_R = k.\theta$

b)
$$\left.\begin{aligned} a_T &= \alpha.R \\ a_R &= 2.\alpha.R.\theta \\ \theta &= 0 \\ \varphi &= 60° \\ \cos\varphi &= \frac{a_R}{a} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} tag\varphi &= \frac{a_T}{a_R} = \frac{\alpha.R}{2.\alpha.R.\theta} = \frac{1}{2.\theta} \\ \theta &= \frac{1}{2.tag\varphi} = \frac{1}{2.tag.60°} = 0{,}2887[rad] = 16°32'24'' \end{aligned}$$

TEMA 7
MOMENTO ANGULAR – LEYES DE NEWTON EN LA ROTACIÓN.

Introducción: El momento angular es análogo al momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula, y es un vector $\vec{L}$.

$\vec{L} = \vec{r}.\vec{p} = \vec{r}.m.\vec{v}$
$\vec{p} = m.\vec{v} =$ momento lineal.

$\vec{L} = kg.{m^2}/{s}$.
Si al momento angular lo dividimos por el tiempo nos da:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}.\vec{F} = \vec{\tau}$ la razón a la que cambia el momento angular de una partícula es igual al momento de torsión de la fuerza neta que actúa sobre ella.

También tenemos que:
$L = \sum L_i = \left(\sum m_1.r_1^2\right)\omega = I.\omega$.

$\vec{L} = I.\vec{\omega}$ para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría.

$I = m.r^2$ = Inercia rotacional, depende de la masa y de la distancia perpendicular a ella.

Conservación del Momento Angular
Si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es 0, el momento angular de todo el sistema es constante (se conserva).

$I_1.\omega_1 = I_2.\omega_2$. (momento de torsión externo es cero).

Los momentos de torsión de las fuerzas internas pueden transferir momento angular de un cuerpo a otro, pero no puede cambiar el momento angular del sistema.

Teorema de los ejes paralelos
"La inercia rotacional de un cuerpo cualesquiera alrededor de un eje arbitrario es igual a la inercia alrededor de un eje paralelo que cruza el centro de masa, más la masa total multiplicada por la distancia al cuadrado entre los dos ejes".

$I = I_{CM} + M.h^2$

$I_{CM} =$ inercia rotacional alrededor de un eje paralelo que cruza por el centro de masa.
$M =$ masa total del objeto.
$h =$ distancia perpendicular entre los ejes.

La torca neta correspondiente al sistema de dos partículas, es la suma de las torcas netas de cada una de ellas. La torca denominada por Resnick, también es denominada como momento de torsión, por Sears.

$\tau = r.F.sen\theta$ (torca), su unidad puede ser N.m (Newton por metro) o lb.ft (libra por pie).

$$\sum \tau_z = \sum \tau_{1z} + \sum \tau_{2z}..$$

$\tau = I.\alpha_z$ (la torca es igual a la inercia rotacional por la aceleración angular).

Tenemos que la inercia rotacional del sistema de dos partículas:

$$I = m_1.r_1^2 + m_2.r_2^2...... = \sum m_n.r_n^2.$$

entonces tenemos:

$\sum \tau_{ext.z} = I.\alpha_z$ (forma rotacional de la segunda ley de Newton).

Aplicaciones de las leyes del Equilibrio de Newton para la Rotación
Para que un cuerpo esté en equilibrio, la fuerza externa neta y la torca externa neta ha de ser cero (Resnick).
Aquí tratamos el caso especial cuando el cuerpo se encuentra en reposo.
$\sum \vec{F}_{ext.} = 0$ y $\sum \vec{\tau}_{ext.} = 0$

de donde. $\sum F_y = 0$; $\sum F_x = 0$; $\sum F_z = 0$ y

$\sum \tau_y = 0$; $\sum \tau_x = 0$; $\sum \tau_z = 0$

Metodología para resolver problemas de Equilibrio.
En primer lugar se debe proceder a realizar el diagrama del cuerpo libre, donde se colocan todas las fuerzas que actúan en el sistema, sus puntos de aplicación; posteriormente se elige sistema de coordenadas y se establecen los ejes que servirán para resolver las fuerzas y las torcas.

Tener en cuenta que para las torcas, su sumatoria es igual a 0, para cualquier eje elegido y se toma positivo para aquella torca que gire en el sentido contrario a las agujas del reloj, por ejemplo si tenemos una torca en sentido positivo que gira alrededor de un eje, debe existir necesariamente otra torca que gire sobre éste eje elegido pero de sentido contrario o sea negativo, a los fines que el sistema se encuentre en equilibrio.

Pb. 7. 01.- Volkenshtein.

Un volante, cuyo momento de inercia es $I = 63{,}6\left(kg.m^2\right)$, gira con la velocidad angular constante $\omega_0 = 31{,}4\, {rad}/{s}$. hallar el momento decelerador $\underline{\tau}$ bajo cuya acción el volante se detiene al cabo de t = 20s.

Solución:

$$\omega = \omega_0 - \alpha.t = 0$$

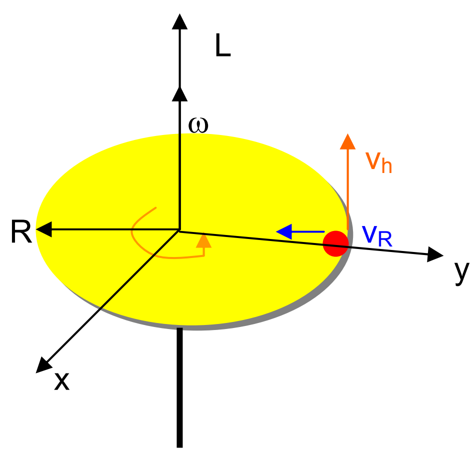
$$\alpha = \frac{\omega_0}{t}$$

$$\tau = I.\alpha = I.\frac{\omega_0}{t} = 63{,}6\left(kg.m^2\right).\frac{31{,}4\left({1}/{s}\right)}{20s} = 100\left(N.m\right)$$

Pb. 7. 02.- Volkenshtein.

Una plataforma horizontal de 100 Kg. de masa gira alrededor de un eje vertical que pasa por un centro y da 10 r.p.m. Un hombre que pesa 60 kgf se encuentra en estas condiciones en el borde de la plataforma. ¿Con qué velocidad comenzará a girar la plataforma si el hombre se traslada desde el borde hacia el centro de la misma?. Considera que la plataforma es un disco circular homogéneo y que el hombre es una masa puntual.

Solución:



al inicio es $L_0 = I_p.\omega_0 + (m_H.R^2)(\frac{v_H}{R})$.

Se conserva el momento cinético cuando m_H se traslada hasta el centro, ya que no hay impulsión angular exterior:

$0=\int \tau .dt=\Delta L$, entonces al final es: $L=I_p.\omega+0$
cuando el hombre se encuentra en el centro:

$$L_0=L$$
$$I_p.\omega_0+m_H.R.v_H=I_p.\omega$$

aquí es: $I_p=\frac{1}{2}.m_p.R^2$., $\quad v_H=\omega_0.R \quad \omega_0=10\left[{}^{rev}\!/_{\min}\right]\frac{2.\pi(rad)}{1(rev)}.\frac{1(\min)}{60(s)}$

$$\omega_0.\frac{1}{2}.m_p.R^2+m_H.R^2.\omega_0=\frac{1}{2}.m\ .R^2.\omega.$$

$$\omega=\omega_0+\omega_0.2\frac{m_H}{m_p}$$
$$\omega=\omega_0\left(1+2\frac{m_H}{m_p}\right)=10.\left(1+2.\frac{60}{100}\right).\frac{2.\pi}{60}\left[{}^{rad}\!/_{s}\right]=2{,}3\left({}^{rad}\!/_{s}\right)$$

$$\omega=2{,}3\,{}^{rad}\!/_{s}$$

Pb. 7. 03.- Bueche.
Una calesita consta de un disco sólido uniforme de 200 Kgf y gira alrededor de un eje vertical. El radio mide 6,0 m, y un hombre de 100 kgf está parado en su borde exterior cuando gira a 0,2 rev/s., a)¿Con qué velocidad girará si aquél camina 3,0 m, hacia el centro a lo largo de un radio?., b) ¿Qué sucederá si el hombre sale por el borde?.

Solución:
El momento de inercia vale: $I_1=\frac{1}{2}m.R^2+m_H.(R-r_1)^2$ (**1**)
Se conserva $L=\omega_0.I_0=\omega_1.I_1=cte.$ (**2**)
$m=200(kgf).$
$R=6{,}0(m).$
$m_H=100(kgf)$ $\qquad I_0=\frac{1}{2}m.R^2+m_H.R^2$ (**3**)
$\omega_0=0{,}2\left({}^{rev}\!/_{s}\right).\frac{2.\pi.(rad)}{1(rev)}=1{,}256\,{}^{rad}\!/_{s}$

como el momento se conserva, de (1) y (3), tenemos:

$$\omega_0\left(\frac{1}{2}.m.R^2+m_H.R^2\right)=\omega_1\left(\frac{1}{2}m.R^2+m_H.(R-r_1)^2\right)$$

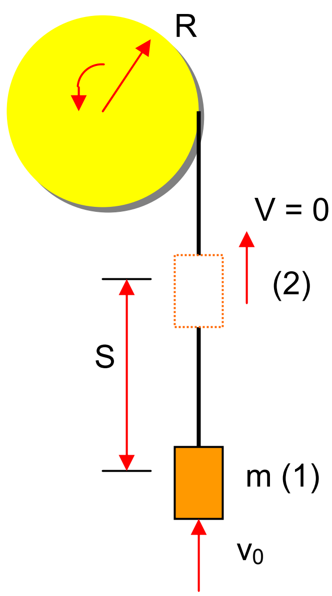
$$\omega_1=\omega_0\cdot\frac{\frac{1}{2}m.R^2+m_H.R^2}{\frac{1}{2}.m.R^2+m_H.(R-r_1)^2}=0{,}32\,{}^{rev.}\!/_{s}$$

b) En este caso es $r_2=0,\Rightarrow\omega_2=\omega_0=0{,}2\,{}^{rev.}\!/_{s}$

Pb. 7. 04.- Bueche.

En determinado instante la masa que se muestra en la fig., es empujada con velocidad de 2,0 m/s. Si esta alcanza una distancia de 50 cm., antes de detenerse, ¿De qué magnitud es el momento de inercia de la rueda?.

Solución:



R = 8,0 cm
M = 300 g
S = 50 cm
V_0 = 2,0 m/s

Sobre el sistema una vez que se encuentra en movimiento solamente actúa la fuerza gravitacional, como es conservativa, hay conservación de la energía mecánica.

$\Delta E=\Delta E_K+\Delta E_P=0.,\therefore\Rightarrow-\Delta E_K=\Delta E_P.$ (1) $\qquad \omega_0=\frac{v_0}{R}$

$$\Bigg\}$$

$$\Delta E_K = 0 - \left(\frac{1}{2} m.v_0^2 + \frac{1}{2}.I.\omega_0^2 \right)$$ regresando a (1) tenemos: $m.g.S = \frac{1}{2} m.v_0^2 + \frac{1}{2} I.\frac{v_0^2}{R^2}$

$$\Delta E_P = m.g.S - 0$$

con esta igualación despejamos el momento de inercia de la rueda:

$$I = \frac{2.R^2}{v_0^2}\left(m.g.S - \frac{1}{2} m.v_0^2 \right) = m.R^2\left(\frac{2.g.S}{v_0^2} - 1 \right) = 27{,}84.10^{-4}\left[kg.m^2 \right]$$

otra manera de resolverlo:

$L_0 = m.v_0.R + I.\omega_0$ donde $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$

mientras el cuerpo asciende es impulsado por la fuerza gravitacional, en sentido contrario durante todo el tiempo de ascensión, que lo hace con movimiento uniformemente retardado puesto que la fuerza impulsora (el peso) es constante, por lo tanto tenemos:

$\int_0^t M.dt. = \Delta L;$ $M = -m.g.R = cte.$ resulta: $-m.g.R.t = 0 - \left(m.v_0.R + I.\omega \right)$ (1)

como en un Movimiento Uniformemente acelerado, es:

$$\left. \begin{array}{l} S = v_0.t - \frac{1}{2}.a.t^2 \\ 0 = v_{0-a.t} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} t = \frac{v_0}{a} \\ S = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2} a.\frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{2.a} \end{array}$$

de aquí:

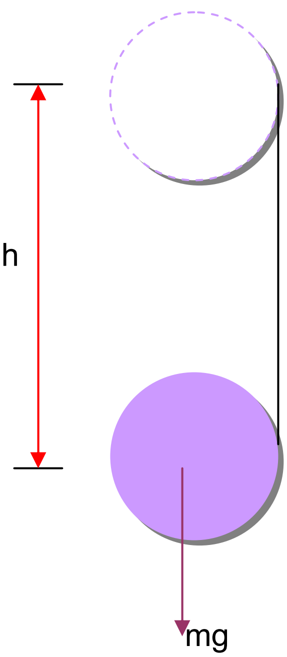
$$S = \frac{v_0}{2}.t. \therefore \Rightarrow t = \frac{2.S}{v_0}$$

sustituyendo en (1)

$m.g.R\frac{2.S}{v_0} = m.v_0.R + I.\frac{v_0}{R}$, de donde obtenemos: $\left(\frac{2.g.S}{v_0} - v_0 \right) m.R = I.\frac{v_0}{R}$

$$\boxed{I = \left(\frac{2.g.S}{v_0^2} - 1 \right) m.R^2 = 2{,}8.10^{-3}\left[kg.m^2 \right]}$$

Pb. 7. 05.- Sears (modificado).
Calcular la rapidez v_{cm}, aceleración y tensión de la cuerda de un yoyo, compuesto de un cilindro sólido, de masa M y radio R, enrollado en una cuerda de masa despreciable, que cae de una altura h.
Solución:



si parte de una altura, entonces tenemos energía potencial, y por lo tanto empleamos la ley de la conservación de la energía:

$E_p = E_k$ $\qquad$ E_p = mgh; (1) $\qquad$ $E_k = \frac{1}{2}M.v_{cm}^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2$ $\quad$ (2)

Pero como $\left.\begin{array}{l} \omega = \frac{v_{cm}}{R} \\ I_{cm} = \frac{1}{2}M.R^2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} E_K = \frac{1}{2}M.v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}M.R^2\right]\frac{v_{cm}^2}{R^2} = \\ = \frac{1}{2}M.v_{cm}^2 + \frac{1}{4}M.v_{cm}^2 = \frac{3}{4}M.v_{cm}^2 \end{array}$

Regresando a (1) e igualando con (2), tenemos:

$$M.g.h = \frac{3}{4}M.v_{cm}^2 .,\therefore \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}g.h}$$

b) la única fuerza que realiza momento de torsión o torca, es:

$$\sum F_y = T - M.g = M(-a).,\therefore \Rightarrow T = M.g - M.a \quad (4)$$

$\tau = T.R = I.\alpha$ (5) ; como: $a = \alpha.R.,\therefore \Rightarrow \alpha = \dfrac{a}{R}$

$T = \dfrac{I.\alpha}{R} = \dfrac{I.a}{R^2}$ ahora igualamos las tensión de las dos ecuaciones (4) y (5):

$$M.g - M.a = \frac{I.a}{R^2}.,\therefore \Rightarrow M.g - M.a = \frac{1}{2}M.R^2.\frac{a}{R^2}$$

$$g - a = \frac{1}{2}.a.,\therefore \Rightarrow g = \frac{1}{2}a + a.,\therefore \Rightarrow a = \frac{2}{3}g.$$

ahora calculamos la tensión:

$$T = M.g - M.\frac{2}{3}g.,\therefore \Rightarrow T = M\left(g - \frac{2}{3}g\right) = M.g\left[\frac{3-2}{3}\right]$$

$$T = \frac{1}{3}M.g$$

Pb. 7. 06.- Sears (modificado).
Un rodado rocoso perfectamente redondeado, rueda sin resbalar sobre una superficie plana con una rapidez constante de 2 m/s. Sí se encuentra con un talud de 30°, ¿hasta que altura puede subir antes de pararse?.

Solución:
$I = \dfrac{2}{5}M.R^2 \Rightarrow$ Momento de inercia de una esfera rellena.

$$\omega^2 = \frac{v_{cm}^2}{R^2}$$

La energía cinética es:
$$E_K = \frac{1}{2}M.v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I.\omega^2$$
$$E_K = \frac{1}{2}M.v_{cm}^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.M.R^2.\frac{v_{cm}^2}{R^2}$$

$E_K = \dfrac{7}{10}M.v_{cm}^2.$ con este valor y el de la energía potencial: $m.g.h$., tenemos:

$$\frac{7}{10}M.v_{cm}^2 = m.g.h.,\therefore \Rightarrow h = \frac{7}{10}\frac{v^2}{g} = \frac{7x4}{10x9,8} = 0,286m.$$

Pb. 7. 07.-

¿Qué velocidad adquirirá un rodado que se desprende de una ladera perfectamente lisa, y que rueda sin resbalar, Sí la ladera tiene una inclinación de 60° y la distancia recorrida es de 20 m?.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} E_p &= m.g.h \\ E_k &= \frac{1}{2}m.v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I.\omega^2 \\ I &= \frac{2}{5}m.R^2 \\ \omega^2 &= \frac{v_{cm}^2}{R} \end{aligned}\right\}$$

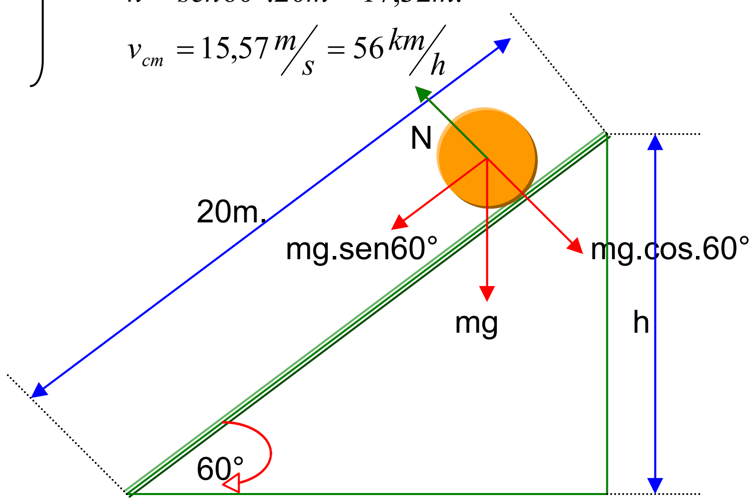
$$E_k = \frac{7}{10}m.v_{cm}^2$$

$$E_p = E_k.,\therefore \Rightarrow m.g.h = \frac{7}{10}m.v_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10.g.h}{7}}$$

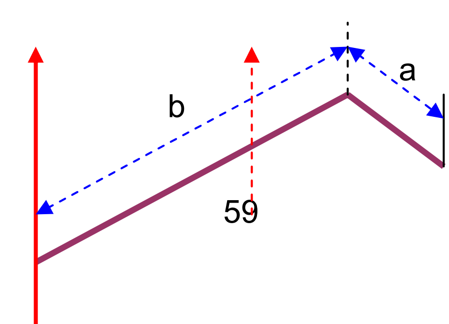
$$h = sen60°.20m = 17,32m.$$

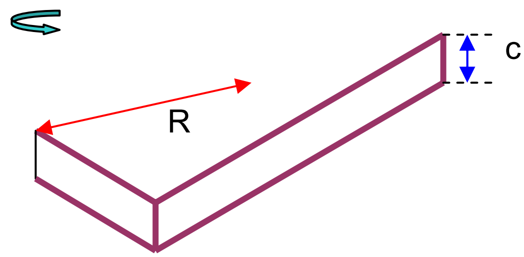
$$v_{cm} = 15,57\,{}^{m}\!/_{s} = 56\,{}^{km}\!/_{h}$$



Pb. 7. 08.- Resnick (Ejes Paralelos).

La fig. muestra un bloque uniforme de masa M y con longitud de borde a, b, y c. Calcule la inercia rotacional alrededor de un eje que pasa por una esquina, y que es perpendicular a la cara grande del bloque.





Solución:

El momento de inercia de una placa rectangular alrededor de un eje perpendicular que pasa por el centro es:

$I = \frac{1}{12}M\left(a^2 + b^2\right)$ y por el teorema de los ejes paralelos, y empleando Pitágoras queda:

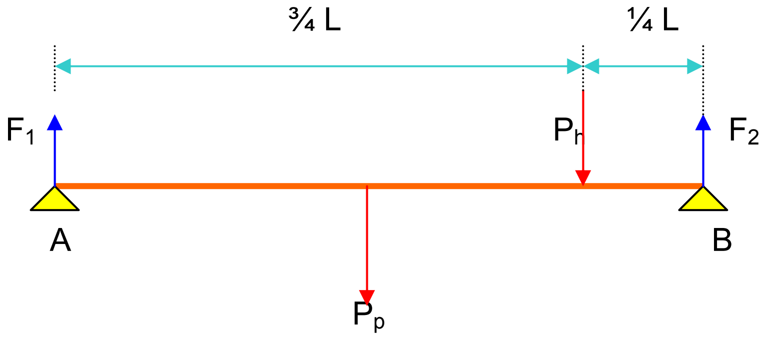
$$\left.\begin{aligned} I &= I_{cm} + M.R^2 \\ R^2 &= \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) \end{aligned}\right\} \qquad I = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right) + \frac{M}{4}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}M\left(a^2 + b^2\right)}$$

Problemas de Equilibrio:

Pb. 7. 09.- Resnick.
Una persona de 160 lb. de peso, camina por un puente plano y se detiene a tres cuartas partes de la distancia de un extremo. El puente es uniforme y pesa 600 lb., ¿qué valores tiene las fuerzas verticales que los soportes ejercen sobre los extremos?.

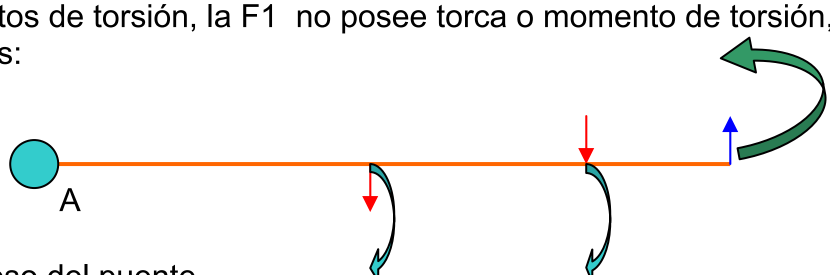
Solución:



Empleando la primera ley de Newton tenemos:

$$\sum \vec{F}_y = 0 = F_1 + F_2 - P_p - P_h .,\therefore \Rightarrow F_1 = P_p + P_h - F_2 \quad (1)$$

haciendo el centro de giro en el punto A, y empleando la sumatoria de las torcas o momentos de torsión, la F1 no posee torca o momento de torsión, entonces tenemos:



$P_p =$ peso del puente

$P_h =$ peso del hombre

$$\sum \tau_A = P_p.\frac{L}{2} + P_h.\frac{3}{4}L - F_2.L = 0$$

$$F_2 = \frac{P_p}{2} + \frac{3P_h}{4} = 420lb.$$

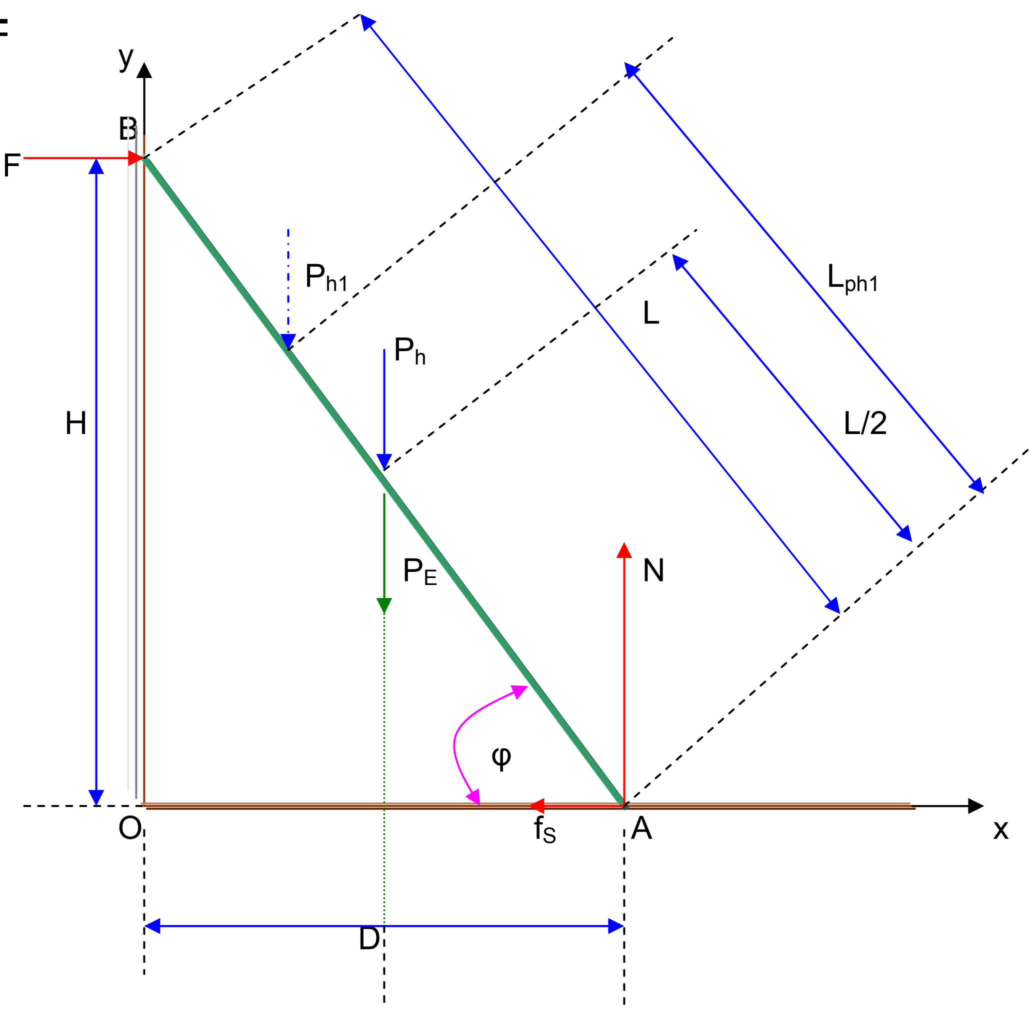
regresemos con este valor de F_2 a la ecuación de (1):

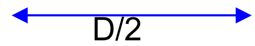
$$F_1 = P_p + P_h - F_2 = 340lb.$$

Pb. 7. 10.- Sears (modificado).

Una estudiante desea medir una diaclasa que se encuentra en un talud vertical de un corte en roca en un camino de montaña. Provisto de una escalera de 6 m de longitud, se apoya en el talud vertical liso, encontrándose su extremo inferior a 3,6 m de la pared; el peso de la escalera es de 40 kgf, y el coeficiente estático de rozamiento entre el pie de la escalera y el suelo es 0,4. El estudiante cuyo peso es de 80 kgf, sube lentamente por la escalera., a)¿cuál es la máxima fuerza de rozamiento que el suelo puede ejercer sobre la escalera, en su extremo inferior?., b)¿cuál es la fuerza de rozamiento real cuando el estudiante ha subido 3 m a lo largo de la escalera?., c)¿qué longitud podrá subir el estudiante por la escalera antes que ésta comience a deslizarse?. Considere que en la pared vertical del talud donde apoya la escalera no existe rozamiento.

Fig. 1.-

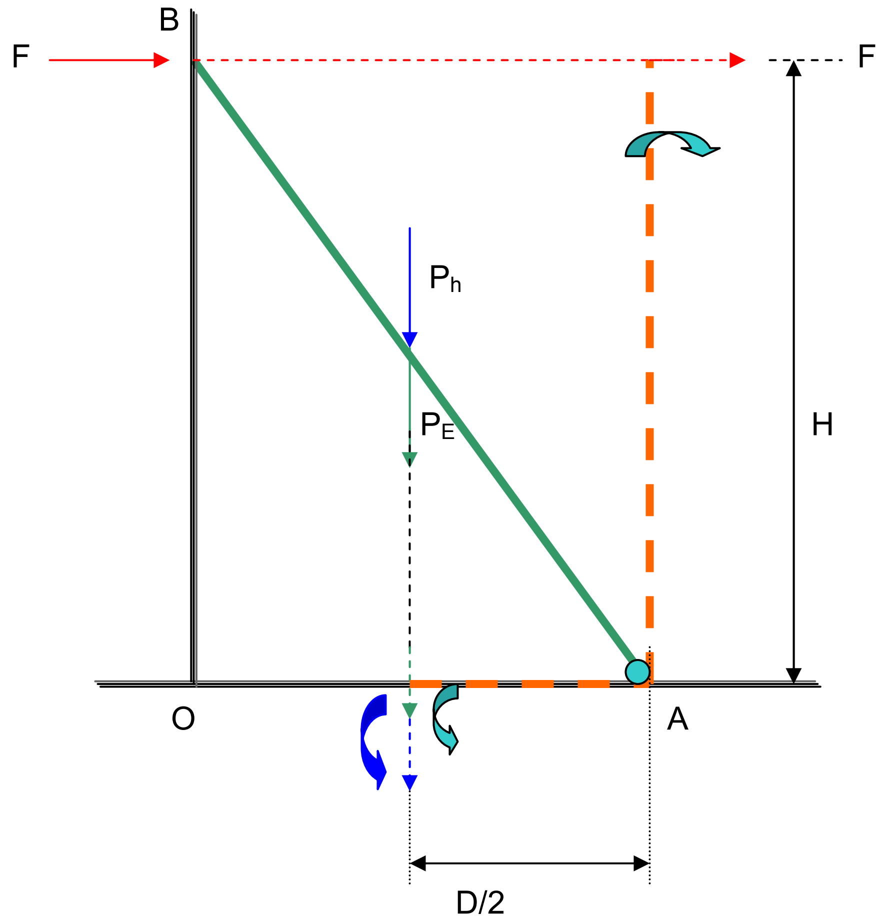




Solución

Datos:
L = 6m D = 3,6 m
P_E = 40 kgf. P_h = 80 kgf
a) $f_{max.}$ = ?. b) f_{Ph} = ?. c) L_{Ph1} = ?., $f_{Ph1} = f_{max.}$

Fig. 2.-



En primer lugar debemos cumplimentar con lo que dice la primera ley de Newton, donde:

$\sum \vec{F} = 0$., entonces observando la Fig. 1, tenemos las sumatorias para los ejes x e y: $\sum \vec{F}_y = N - m.g - Mg = 0.,\therefore \Rightarrow N = m.g + M.g$ (1)

$$\sum \vec{F}_x = F - f_s = 0.,\therefore \Rightarrow F = f_s \quad (2)$$

donde:

$P_E = m.g =$ peso de la escalera

$P_h = M.g =$ peso del estudiante.

$F =$ fuerza que efectúa la pared sobre la escalera

$f_s =$ fuerza de rozamiento entre la escalera y el piso

$D =$ distancia de la pared al punto de apoyo escalera-piso.

$H =$ altura de la escalera.

a) La máxima fuerza de rozamiento, se da ante la inminencia del deslizamiento y por lo tanto se cumple:

$$f_s = \mu_s.N.,\Rightarrow como: \mu_s = 0{,}4$$
$$f_s = 0{,}4.(40+80) = 48kgf = 470{,}4N.$$

b) ahora tenemos que aplicar el momento de torsión o también denominado torca, y para ello tomamos como eje de giro el punto A (Fig. 2), a los fines de eliminar algunas operaciones (como práctica podemos tomar como eje de giro al punto B, o al punto O), por lo que tenemos:

$F.H - m.g.\dfrac{D}{2} - M.g.\dfrac{D}{2} = 0$., (3)., (se toma como brazo a *D/2,* tanto para la escalera como para el estudiante, ya que para la primera se toma el centro de gravedad que es el punto donde se encuentra concentrado el peso y el estudiante está a 3 metros sobre la escalera, por lo tanto también se encuentra en el centro de gravedad de la escalera, pues la escalera posee 6 metros de longitud, y proyectando sobre *D,* será: *D/2*.). Regresando al punto A o centro de giro, lo que se puede observar tanto *N*, como f_s, no poseen momento o torca, al no poseer brazo de aplicación; por Pitágoras calculamos H., (y aplicando tangente obtenemos el ángulo φ). De la ecuación (3) despejamos F:

$$F = \frac{m.g.\dfrac{D}{2} + M.g.\dfrac{D}{2}}{H} = \frac{40kgf.1{,}8m + 80kgf.1{,}8m}{4{,}8m} = 45kgf = 441N. \quad (4)$$

como $f_s = F = 441N$

$$H^2 = L^2 - D^2 \qquad\qquad tag\varphi = \frac{H}{D}.,\Rightarrow \varphi = arc.tag$$

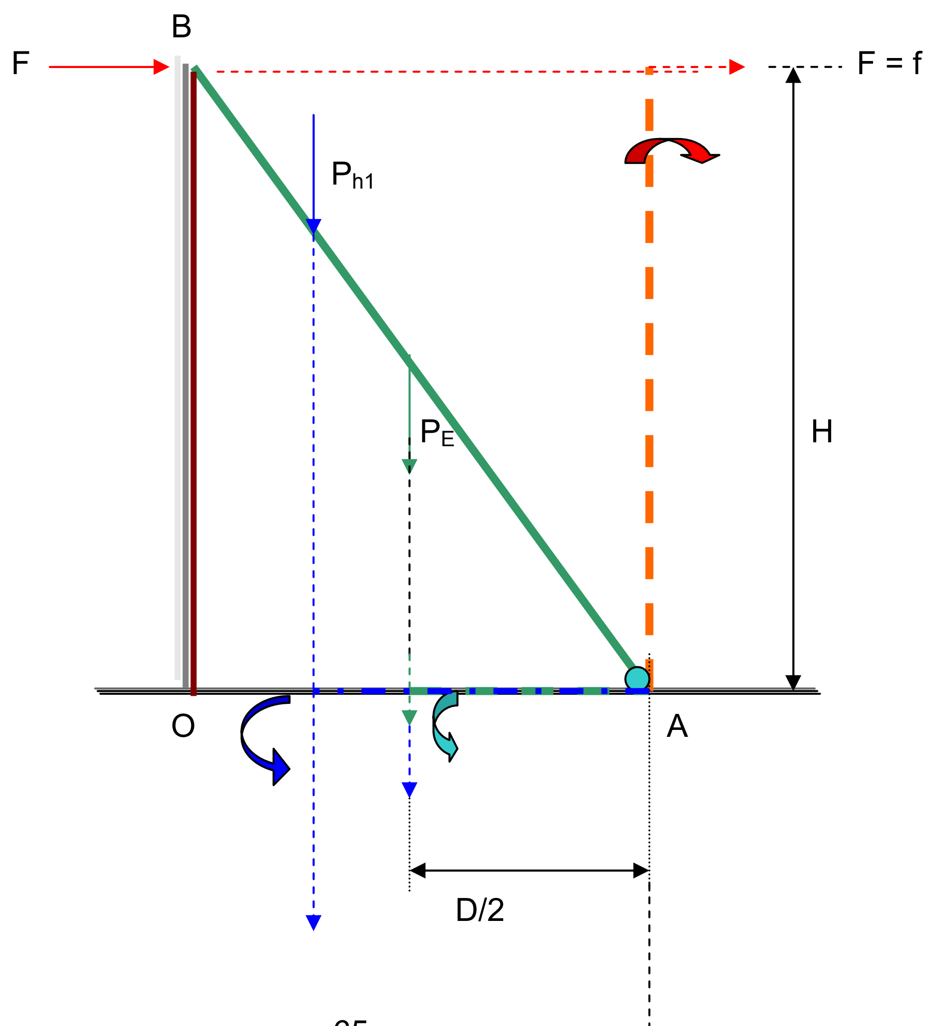
c) la longitud sobre la escalera que subirá el estudiante antes de que comience a deslizar será:

$l.\cos\varphi$ = longitud del brazo de aplicación sobre la distancia horizontal D (Fig.3, en azul) con el peso P_{h1} del estudiante, del cual despejamos la longitud que subirá el estudiante sobre la escalera, y como: $f_s = F$, por lo tanto de (4):

$f_s.H = m.g\dfrac{D}{2} + M.g.l.\cos\varphi$., de esta ecuación despejamos la distancia sobre la escalera que recorrerá el estudiante en el momento que inicie el deslizamiento, en ese instante la fuerza de fricción será la máxima, o sea la calculada en el punto a)., por lo que tenemos:

$$M.g.l.\cos\varphi = f_s H - m.g.\frac{D}{2}$$

$$l = \frac{f_s.H}{M.g.\cos\varphi} - \frac{m.g.\dfrac{D}{2}}{M.g.\cos\varphi} = 3{,}20m.$$



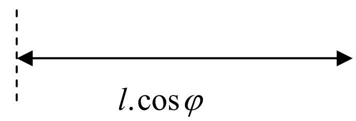


Fig. 3.

Pb. 7. 11.- Resnick.
¿Qué fuerza mínima aplicada horizontalmente al eje de la rueda de la fig., se requiere para levantarla sobre un obstáculo de altura h?., suponga que R es el radio de la rueda y W es su peso.

Solución:

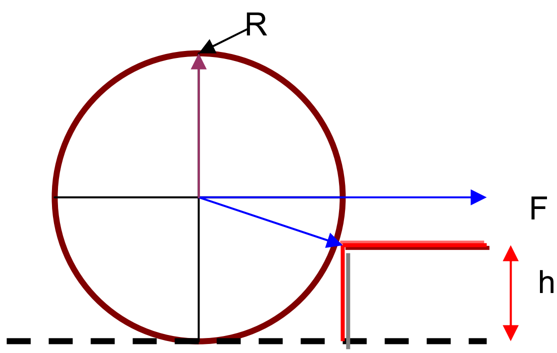


Fig.1

Cuerpo libre:

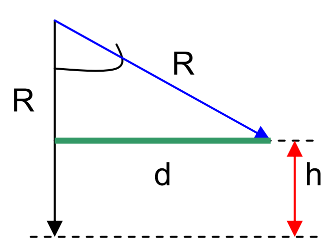


Fig.2

por Pitágoras (Fig.2):

$d = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$, ahora como se resuelve lo que ocurre en la raíz:

$$R^2 - (R^2 - 2.R.h + h^2) = R^2 - R^2 + 2.R.h - h^2 = 2.R.h - h^2$$

ahora sacamos factor común con h:

$d = \sqrt{h(2.R-h)}$., ahora bien tenemos que determinar la torca o momento de torsión que se encuentra en el sistema (Fig.3), se presenta una torca formada por la fuerza F y su brazo de aplicación R – h, con rotación a la derecha, y la torca o momento con rotación a la izquierda o sea que se opone a la primera constituida por el peso W y su brazo de aplicación d, que es perpendicular y tiene su punto de aplicación en el obstáculo por lo tanto tenemos:

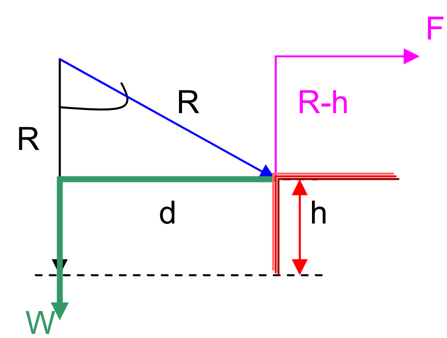


Fig.3

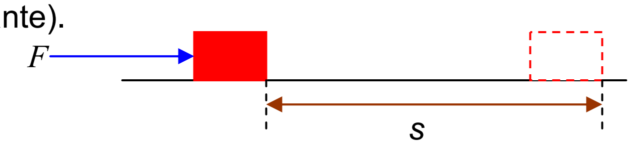
$$\sum \tau = 0 = F.(R-h) - W.\sqrt{h(2.R-h)}$$

$F = \dfrac{W.\sqrt{h(2.R-h)}}{R-h}$ es la fuerza que se encuentra en equilibrio, una mínima adisión positiva será suficiente para que la rueda circule sobre el obstáculo.

TEMA 8
TRABAJO Y ENERGIA

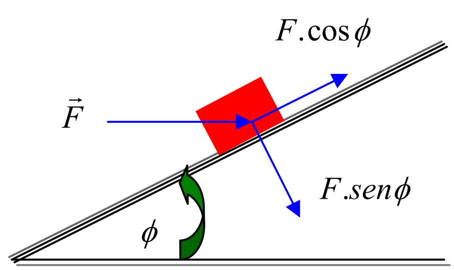
Introducción: el Trabajo incluye una fuerza ejercida conforme el punto de aplicación va recorriendo una distancia., y la Energía de un sistema consiste en medir su capacidad de realizar trabajo (Resnick), o bien de otro punto de vista el Trabajo de un sistema es la variación de su Energía Cinética.

$W = F.s$ (fuerza constante).



Para el caso de un plano inclinado, cuando se ejerce una fuerza en el sentido horizontal formando un ángulo con el vector desplazamiento tenemos:

$W = F.s.\cos\phi$. (fuerza constante).



Teorema del Trabajo y Energía:

"el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es igual al cambio de su Energía Cinética".

$W_{neto} = \Delta K = K_f - K_i$ = $\frac{1}{2} m.v_f^2 - \frac{1}{2} m.v_i^2$ (tanto el Trabajo como la Energía se mide en Joule) $kg.\frac{m}{s^2}.m = N.m = Joule$.

Energía potencial = $m.g.h$, masa por gravedad por altura.

$F.s = m.gh = \Delta K.$

Energía potencial elástica de un resorte: $W_s = -\frac{1}{2} k.x^2$., donde tenemos que:

$k =$ constante de fuerza del resorte, N/m

$x^2 =$ desplazamiento del resorte.

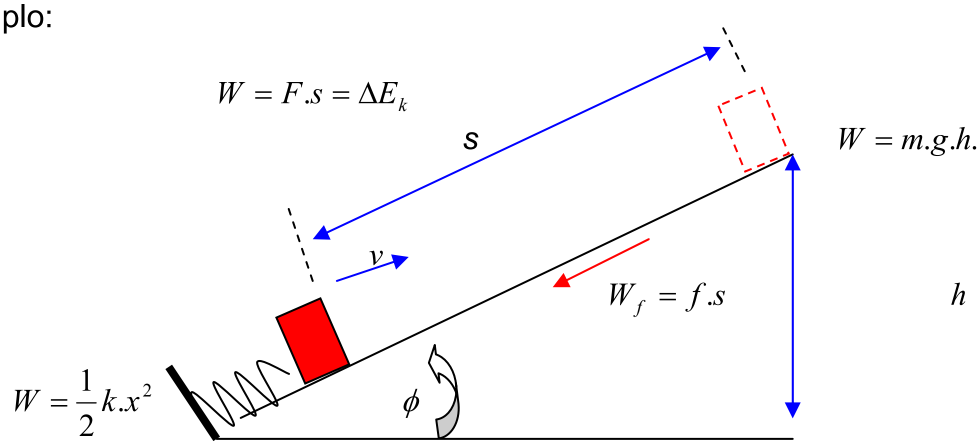
El signo menos en la ecuación es debido a que la fuerza del resorte siempre es contraria al desplazamiento del cuerpo.

"la Energía mecánica total permanece constante en un sistema aislado donde sólo intervienen fuerzas conservativas".

Las fuerzas que operan dentro de un sistema pueden trasformar la energía cinética en energía potencial, o viceversa, pero la energía mecánica total permanece constante.

Si fuerzas no conservativas, como la fricción, actúan sobre el sistema, esta última no es constante.

Ejemplo:



Tenemos un resorte comprimido. Al ser liberado el objeto adquiere una velocidad, y se detiene a una altura determinada. En otras palabras diremos que la energía potencial elástica del resorte se transforma en energía cinética y ésta se transforma en trabajo de la fuerza de fricción (no conservativa) y en energía potencial,

$$W_{p.E} = \frac{1}{2}k.x^2 = \Delta\left(\frac{1}{2}m.v^2\right) - f.s = F.s = m.g.h$$

Potencia: se define como la rapidez con que se realiza el trabajo.(potencia mecánica).

$$P = \frac{W}{t} = Joule\big/segundo = Watt \text{ .,} \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{s}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = F.v$$

Metodología para resolver problemas

Como primera medida ubique las posiciones inicial y final del cuerpo, luego proceda a realizar el diagrama de cuerpo libre, ubique las fuerzas y proceda a calcular el trabajo efectuado por cada una de ellas, represente las incógnitas con símbolos algebraicos. Es de suma importancia revisar los signos, ya que si la fuerza tiene alguna componente en el sentido del desplazamiento, su trabajo es positivo, si lo tiene en sentido contrario el trabajo es negativo, y si la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares entre si, el trabajo es igual a cero. Si sumamos los trabajos de las fuerzas individuales obtenemos el trabajo total. Cuando estamos tratando la energía cinética, tenga en cuenta que ésta nunca es negativa. Finalmente escribimos las expresiones para las energías inicial y final, y también cuándo se usa la energía potencial, tanto de la gravedad como la elástica, ya que es de suma importancia determinar los estados iniciales y finales, y de esta manera poder escribir en forma de ecuación las secuencia de cambios de tipos de energía, lo que nos facilita el despeje de incógnitas para poder resolver el problema.

Pb. 8. 01.- Un fragmento rocoso de 30 gr., expulsado por un volcán, viaja inicialmente a 500 m/seg., penetra 12 cm., en una pared rocosa.

a) ¿cuál es el trabajo realizado por la pared para parar el fragmento?.
b) Asuma que la fuerza de la pared sobre el fragmento es constante y calcule su valor.

R. a) 3700 J.
b) 31250 N.

Pb. 8. 02.- Un bloque que pesa 50 kgf, es empujado una distancia de 6 m, subiendo por la superficie de una ladera de pared lisa con una inclinación de 37°

mediante una fuerza F = 50kgf, paralela a la superficie del plano. El coeficiente cinético de rozamiento entre el bloque y el plano es de 0,2.

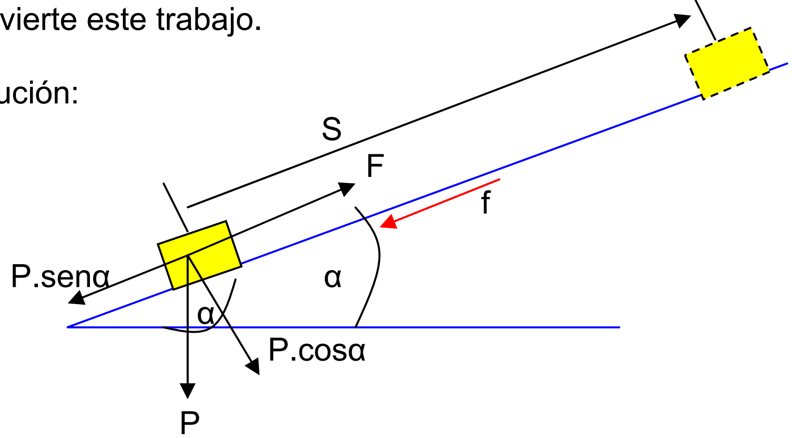
a)¿qué trabajo ha realizado la fuerza F?

b) Calcúlese el aumento de Energía Cinética del bloque.

c) Hállese el aumento de Energía Potencial del mismo.

d) Calcúlese el trabajo realizado contra la fuerza de rozamiento, y en que se convierte este trabajo.

Solución:



a) al ser F constante y paralela y del mismo sentido que S, el trabajo realizado por la fuerza F vale simplemente:
$W = F.S = 2443 Julios.$

b) como el teorema del trabajo y la energía cinética dice: "el trabajo de la fuerza resultante ejercida sobre una partícula es siempre igual al incremento de la energía cinética de la partícula"., y como la fuerza de rozamiento vale:
$f = \mu.P.\cos\alpha.$
$\Delta E_k = (F - P.sen\alpha - \mu.P.\cos.\alpha).S = 706{,}32 Julios$

c) El trabajo de la fuerza gravitacional vale:

$$W_{grav.} = P.sen\alpha.S.\cos.180^0 = -P.S.sen\alpha.$$
$$\Delta E_p = P.S..sen\alpha = 1765{,}80 Julios$$

d) El trabajo contra el rozamiento es el de una fuerza igual a f, pero de sentido contrario al de la fuerza f de la figura. Por ser f constante, este trabajo vale:

$$W_f = \mu.P.S.\cos\alpha = 470{,}88 Julios.$$

Si no hubiera rozamiento

$$\Delta E_1 = F.S$$

porque este incremento de la energía mecánica es igual al trabajo de la resultante de todas las fuerzas excepto la conservativa (en este caso la de la gravedad) $P.sen\alpha.$

pero al existir rozamiento y como el incremento de la energía mecánica es igual a la suma de los incrementos de las energías cinética y potencial, será;

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = (F - P.sen\alpha - \mu.P.\cos\alpha).S + P.S.sen\alpha.$$

$$\Delta E = F.S - \mu.P.S.\cos\alpha.$$

$$\Delta E$$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = (F - P.sen\alpha - \mu.P.\cos\alpha).S + P.S.sen\alpha.$$

$$\Delta E = F.S - \mu.P.S.\cos\alpha.$$

$$\Delta E \langle \Delta E_1$$

y la diferencia vale:

$$\Delta E_1 - \Delta E = F.S - (F.S - \mu.P.S.\cos\alpha) = \mu.P.S.\cos\alpha.$$

$$pero$$

$$\mu.P.S.\cos\alpha = W_f$$

entonces resulta que el trabajo contra la fuerza de rozamiento es igual a un consumo de energía mecánica que vale:

$$\Delta E_1 - \Delta E = W_f$$

que al ser igual al trabajo contra la fuerza disipativa de rozamiento, significa que ese consumo de energía es una pérdida de energía mecánica, o sea que se ha transformado en energía calórica:

$$\Delta Q = \Delta E_1 - \Delta E = W_f$$

e) la suma de $\Delta E_k + \Delta E_p + W_f$ se obtiene sustituyendo sus resultados

$$\Delta E_k + \Delta E_p + W_f = (F - Psen\alpha - \mu.P.\cos\alpha).S + P.S.sen\alpha + \mu.P.S.\cos.\alpha = F.S = W_f$$

esto resulta inmediato si se considera que el trabajo de la fuerza F ha servido para incrementar las energías cinética y potencial y para realizar un trabajo contra la fuerza de rozamiento, numéricamente:

706,32 + 1765,80 + 470,88 = 2943,00

2943,00 = 2943,00

verifica la igualdad.

Pb. 8. 03.- Una cuerda es usada para bajar verticalmente un bloque de suelo conteniendo un fósil de masa "M" una distancia "d" con una aceleración constante g/4., a) encuentre el trabajo realizado por la cuerda sobre el bloque. , b) encuentre el trabajo hecho por la fuerza de gravedad.

R., a) $W_c = -\frac{3}{4}Mgd$

b) $W_g = Mgd$

(para desarrollar el punto a), deberá realizar la sumatoria de las fuerzas que actúan: $F_c - mg = -ma$).

Pb. 8. 04.- La fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la Tierra sobre un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de la Tierra. Hállese el trabajo necesario para elevar un cuerpo desde la superficie terrestre a una altura por encima de esta superficie igual al radio terrestre **R**. Exprésese la respuesta en función de **R**, la masa **m** del cuerpo y la aceleración de la gravedad $\mathbf{g_o}$ en la superficie terrestre.

Solución:

La relación entre la fuerza de atracción gravitatoria y la distancia al centro de la Tierra, la podemos expresar así:

$F = \frac{k}{r^2}$., donde la constante de proporcionalidad es *k.,* y donde *r* es la distancia al centro de la Tierra.

El trabajo para elevar el cuerpo vale, de acuerdo a la definición de trabajo:

$$W = \int_R^{2R} F.dr$$

sustituyendo y resolviendo la integral

$$W = \int_R^{2R} \frac{k}{r^2}.dr = -k\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{k}{2R}$$

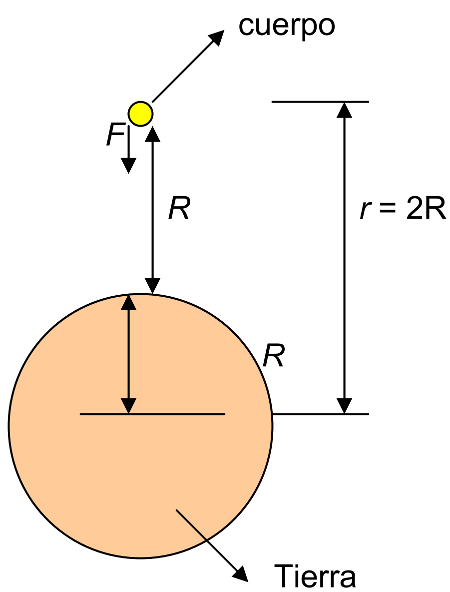
por otra parte, en la superficie terrestre, la fuerza de atracción gravitatoria, de acuerdo a la 2da., ley de Newton, vale:

$F_0 = m.g_0.,$

$F_0 = \frac{k}{R^2}$ y también

de donde obtenemos el valor de la constante: $k = m.g_0.R^2$

de donde el trabajo vale : $W = \frac{1}{2}.m.g.R$



Pb. 8. 05.- Un resorte tiene una constante de 15 N/cm., a)¿cuál es el trabajo requerido para extender el resorte 7,6 mm., de su posición de equilibrio?., b)¿cuánto trabajo es necesario para extenderlo otros 7,6 mm?.

R.,a) W = 0,0433 N.m

c) W = 0,173 N.m.

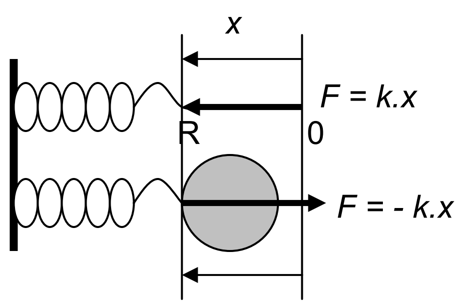
Pb. 8. 06.- El muelle de una escopeta de resorte tiene una constante de 3 libras por pulgadas. Se comprime 2 pulgadas y se coloca en el cañón, contra el resorte comprimido, una pelota que pesa 0,02 lb., a) si no hay rozamiento y sí el cañón de la escopeta está horizontal, hállese la velocidad con la cual la pelota abandona la escopeta cuando queda en libertad., b) ¿cuál es la velocidad si al estar el cañón es horizontal, mientras es acelerada actúa sobre la pelota una fuerza constante de 2,25 lb?.

Solución:

Datos:

1ª)

2ª)



$k = 3\left[{}^{lbr}\!/\!_{pu\lg}\right]$

$x = 2\left[pu\lg\right]$

$P = 0{,}02\left[lbr\right]$

$a)v = ?$

$b)Fconst = 0{,}75\left[lbr\right]$

$v = ?$

en la posición 1ª) el resorte está comprimido por la fuerza exterior *F = k.x:*

$$F = 3\left[{}^{lbr}\!/\!_{pu\lg}\right].2\left[pu\lg\right] = 6\left[lbr\right]$$

En la posición 2ª) ya no actúa *F = k.x*, entonces la fuerza de expansión del resorte, tiende a recuperar la posición central (0). Esta fuerza recuperadora F = -k.x, impulsa la pelota.
Entre la posiciones (R) y (0) rige la conservación d la energía mecánica porque la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza conservativa F = -k.x, entonces es: ΔE = 0,

Cuando el extremo del resorte alcanza la posición (0), la velocidad ahí es máxima y allí sale disparada la pelota con esa velocidad, pues a la derecha de (0) el extremo del resorte va disminuyendo la velocidad, en cambio la pelota conserva la velocidad máxima V que adquirió en (0).

Entonces entre (R) y (0) será:

$$\left(\frac{1}{2}mV^2 + 0\right) - \left(0 + \frac{1}{2}k.x^2\right) = 0$$

Ek_f (0) Ep_{el} Ek_i Ep_i (R)

Ek_f = Energía cinética final en (0)
Ep_{el} = Energía potencial elástica en (0)

Ek_i = Energía cinética inicial en (R) de máxima compresión del resorte.
Ep_i = Energía potencial inicial, en (R).

$$\frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}mV^2.,\Rightarrow V = x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

De aquí es:

$$V = 2[in].\sqrt{\frac{3\left[{}^{lbf}\!/_{in}\right]}{0{,}02[lbf]}.32\left[\frac{ft}{s^2}\right].12\frac{[in]}{[ft]}.\frac{1[ft]}{12[in]}} = 40\left[{}^{ft}\!/_{seg}\right]$$

Debemos tener en cuenta que: $m = \frac{p}{g}$

Para b) en este caso sería un MUA, pues al ser *F = cte., a = cte.*, y entonces es:

$V = a.t$

$x = \frac{1}{2}.a.t^2$ t = tiempo que dura la aceleración producida por *F = cte.*, a lo largo de x*:,* *F = m.a.*

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{P}.g.,$$

esta aceleración vale: $t = \frac{V}{a}$

$$x = \frac{1}{2}.a.\frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{2a}.,\Rightarrow V = \sqrt{2.a.x}$$

$$V = \sqrt{2\frac{F}{P}.g.x} = \sqrt{2.\frac{o{,}75}{0{,}2}.32\left[\frac{ft}{seg^2}\right].2[in].\frac{1[ft]}{12[in]}} = 20\left[\frac{ft}{seg}\right]$$

Pb. 8. 07.-
Un estudiante en un día de campo llevo consigo una honda. Tensó la goma de forma que su longitud aumentó 10cm, ¿A qué velocidad salió lanzada la roca si su masa era de 20 gr ?. Para tensar la goma 1 cm., hay que aplicarle 1 kgf. La resistencia del aire al avance de la piedra se desprecia.

Solución:

$$x = 10cm., V = ?.,$$
$$m = 20gr.,$$
Datos: $x_0 = 1cm$
$$F_0 = 1kgf$$
$$W_F = \Delta E_k \quad (1)$$

El trabajo de la fuerza elástica es igual a menos el incremento de la energía potencial elástica:

$$W_F = -\Delta E_p \quad (2)$$

Pero la única fuerza que interviene en la elástica, que es conservativa es:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta E = \Delta(E_p + E_k) = (E_{p2} + E_{k2}) - (E_{p1} + E_{k1}) \\ 0 &= (E_{p2} - E_{p1}) + (E_{k2} - E_{k1}) = \Delta E_p = +\Delta E_k \end{aligned} \quad (3)$$

o sea que este último resultado es lo mismo que (1) y (2) igualadas, lo que viene a afirmar que la energía cinética que adquiere la roca es a expensa de la perdida de la energía potencial elástica de deformación., la (3) es:

$-\left(0 - \frac{1}{2}k.x^2\right) = +\left(\frac{1}{2}.m.V^2 - 0\right)$., y de aquí $\quad k = \frac{F_0}{x_0}$

$$V = x.\sqrt{\frac{k}{m}} = 10[cm].\sqrt{\frac{1[kgf]}{1[cm]}.\frac{1}{20[gr]}}$$

$$V = 0{,}10[m].\sqrt{\frac{1[kgf].\frac{9.8\left[kg.{}^{m}/_{seg^2}\right]}{1[kgf]}}{0{,}01[m].0{,}020[kg]}} = 22\left[\frac{m}{seg}\right].\frac{3600[seg]}{1[h]}.\frac{1[km]}{10^3[m]}$$

$$V = 80\left[{}^{km}/_{h}\right]$$

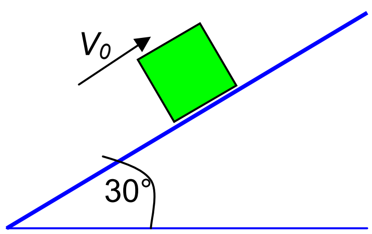
Pb. 8. 08.-

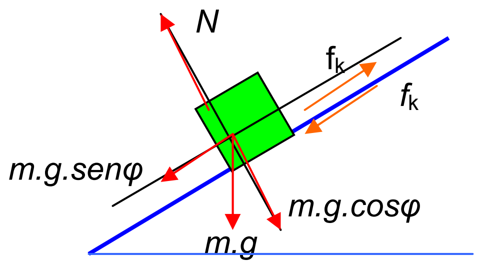
Dos estudiantes de geología se encuentran tomando muestras sobre una ladera de una montaña. Uno de ellos que se encuentra en la parte baja lanza hacia arriba por el plano de la ladera de esquistos una muestra de 2 kg. Este plano tiene una inclinación de 30°, la velocidad de lanzamiento es de 22 m/seg., el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es de 0,3. a)

Calcúlese la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque cuando se mueve hacia arriba sobre el plano; b) ¿cuánto tiempo se mueve el bloque hacia arriba sobre el plano?; c) ¿qué distancia recorre el bloque en su movimiento ascendente?; d)¿cuánto tiempo tarda en deslizarse hacia abajo desde su posición en el punto c hasta el punto de partida?; e) ¿con que velocidad llega a ese punto?; f) ¿si la masa del bloque fuese de 5 kg en lugar de 2kg, ¿variarían las respuestas anteriores?.

Solución:

Datos: $m_1 = 2[kg] ;\Rightarrow V_0 = 22\left[{}^{m}\!/_{seg} \right];\Rightarrow \mu_k = 0,3$





a) $f_k = \mu_k.N = 0,3.2[kg]9,8\left[{}^{m}\!/_{seg^2} \right].\cos\varphi = 5,09[N]$

para calcular el tiempo, primeramente hay que calcular la aceleración:

$$\frac{-m.g.sen\varphi - f_k}{m} = a = -7,445\left[{}^{m}\!/_{seg^2} \right]$$

b) $t = \dfrac{V_0}{a} = 2,96[seg]$

c) $x = V_0.t + \dfrac{1}{2}.a.t^2 = 97,5[m]$

$V_0.t_2 = 0$

d) $x = \dfrac{1}{2}.a.t^2 .,\therefore \Rightarrow t_2^2 = \dfrac{2.x}{a}$., la aceleración: $a = \dfrac{w.sen\varphi - f_k}{m} = 2,35\left[\dfrac{m}{seg^2} \right]$

$t_2 = \sqrt{\dfrac{2.x}{a}} = 9,10[seg]$

e)
$$V_f = V_0 + a.t_2 .,como \rightarrow V_0 = 0$$
$$V_f = a.t_2 = 21{,}38\left[{}^{m}\!/\!_{seg} \right]$$

f)
$$f_k = \mu_k .N = \mu_k .m.g.\cos\varphi = 12{,}73[N]$$
$$a_1 = \frac{-m.g.sen\varphi - f_k}{m} = -7{,}446\left[\frac{m}{seg^2} \right].,\therefore \Rightarrow t_1 = \frac{V_0}{a_1} = 2{,}95[seg]$$
$$x = V_0 .t + \frac{1}{2}.a.t_1^2 \quad = 97{,}3[m]$$

$$a_2 = \frac{w.sen\varphi - f_k}{m} = \frac{5[kg].9{,}8\left[{}^{m}\!/\!_{seg^2} \right].0{,}5 - 12{,}73[N]}{5[kg]} = 2{,}35\left[{}^{m}\!/\!_{seg^2} \right]$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2.x}{a_2}} = 9{,}1[seg]$$

$$V_{f2} = a_2 .t_2 = 21{,}38\left[{}^{m}\!/\!_{seg} \right]$$

Como podemos observar si variáramos el peso no hay variación de los resultados de la aceleración, ni del tiempo, y como lógica consecuencia no hay variación de la velocidad.

TEMA 9
GRAVITACIÓN

Introducción: Juan Kepler (1571 – 1630) dedicó toda su carrera científica a analizar los datos obtenidos por Tycho Brahe (1546 – 1610) y sus conclusiones se resumen en 3 leyes:

1era. Ley: "Cada planeta se mueve de modo que la línea que lo une al Sol barre áreas iguales en iguales intervalos de tiempo, cualesquiera que sea su longitud".

2da. Ley: "La órbita de cada Planeta es una elipse, ocupando el sol uno de sus focos".

3era. Ley: "Los cuadrados de los periodos de dos planetas cualesquiera son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol".

Posteriormente Newton a partir de estas leyes y de las suyas, sobre el movimiento, concluye que cada planeta esta sometido a una fuerza dirigida hacia el Sol e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el Sol y los planetas.

$T^2 = k.R^3$ (1)., 3era. Ley de Kepler.

$T =$ tiempo empleado en una revolución.
k = constante de proporcionalidad que tiene igual valor para todos los planetas.

$F = m\dfrac{v^2}{R}$., (2), 2da. Ley de Newton. ($F = m.a_r .,\Rightarrow a_r = \dfrac{v^2}{R}$)

$T = \dfrac{2.\pi.R}{v}$., (3) periodo en un giro completo de una circunferencia.

De (1) y (3), igualando T, tenemos:

$$k.R^3 = \frac{4.\pi^2.R^2}{v^2} \quad (4)$$

despejando v de (2) y de (4), luego igualamos ambas ecuaciones tenemos:

$$\frac{F.R}{m} = \frac{4.\pi^2.R^2}{k.R^3}$$., y despejamos $$F = \left(\frac{4.\pi^2}{k}\right).\frac{m}{R^2}$$.,

el término $\left(\frac{4.\pi^2}{k}\right)$ es la constante que incluye la segunda masa, denominándose a este término $G.m´$, por lo que la ecuación de la fuerza queda:

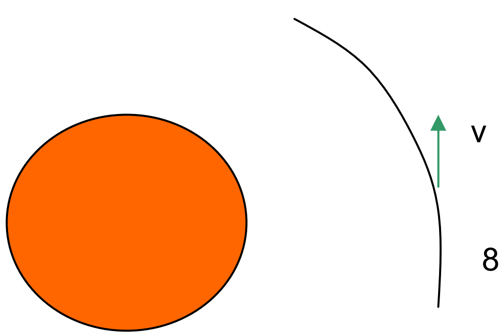
$$\boxed{F = G.\frac{m´.m}{R^2}}$$

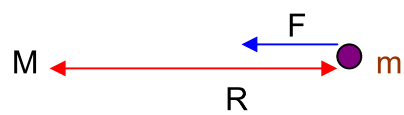
Ley de la Gravitación Universal de Newton: “Toda partícula de materia atrae a otra cualesquiera con una fuerza proporcional al producto de las masas de las partículas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre ellas y dirigida a lo largo de la línea recta que las une”.

Metodología para Resolver Problemas:
Aparentemente la resolución de problemas de este tema parece sencillo, con solo la aplicación de la Ley de Gravitación Universal de Newton, pero hay algunos consejos a seguir: hay que tener en cuenta que la fuerza gravitatoria ejercida por un cuerpo es como si toda su masa estuviera concentrada en su centro, las leyes de Kepler son muy importante, pues describen las formas de las orbitas de un planeta o satélite y las relaciones entre el tamaño y la forma de la órbita y la rapidez del cuerpo en esa órbita (Sears), esto es importante para aquel geólogo que se dedicare a la Geología de otros planetas.

Problemas:
Pb. 9. 01.- Sears.
Demuéstrese que es posible calcular la masa de cualquier planeta si éste tiene un satélite del cual pueda medirse su periodo de revolución y el radio de su órbita, (supóngase una órbita circular)¿Puede hallarse la masa del satélite a partir de los mismos datos?.-

Solución:





Planeta

Para resolver este problema, tenemos que igualar la fuerza gravitacional con la fuerza centrípeta por lo tanto tenemos:

(1) $F = \frac{G.m.M}{R^2} = \frac{m.v^2}{R}$., y (2) $T = \frac{2.\pi.R}{v}$

y como de (1) tenemos que :

$v = \sqrt{\frac{G.M}{R}}$, por lo tanto tenemos que el periodo $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{R^3}{G.M}}$

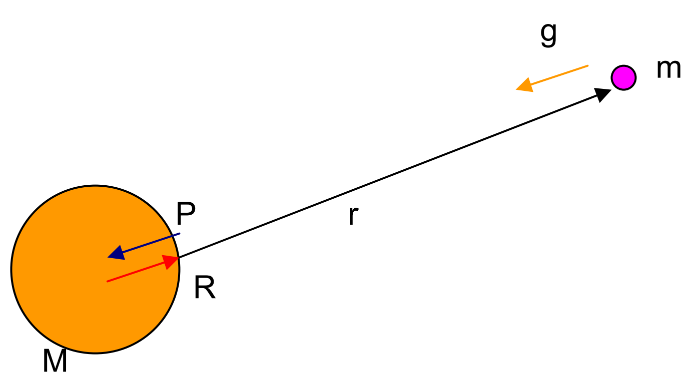
sí eliminamos la raíz, tenemos: $T^2 = \frac{4.\pi^2.R^3}{G.M}$., luego tenemos que:

$\frac{T^2}{4.\pi^2} = \frac{R^3}{G.M}$., por lo tanto despejamos: $M = \frac{4.\pi^2.R^3}{G.T^2}$

en cuanto a la masa del satélite no puede calcularse.

Pb. 9. 02.- Volkenshtein.
¿A que distancia de la superficie de la Tierra, la aceleración de la gravedad será igual a 1 m/s^2?.-

$F = G.\frac{M.m}{r^2}$ (1)



Aquí tenemos la fuerza de la Gravitación Universal y la segunda ley de Newton, igualando ambas tenemos:

$F = m.g_r.,donde \Rightarrow g_r = \frac{F}{m} = \frac{G.M}{r^2}$ (2) pero el peso esta dado por la fórmula de la gravitación pero referido al radio de la Tierra, porque esta medido sobre la superficie:

$P(peso) = \frac{G.M.m}{R^2}$ (3)., luego tenemos que de (2) nos queda. $G.M = g_{r.}R^2$ (4)

pero también sabemos que la gravedad $g = \frac{P}{m} = \frac{G.M.m}{m.R^2} = \frac{G.M}{R^2}$;

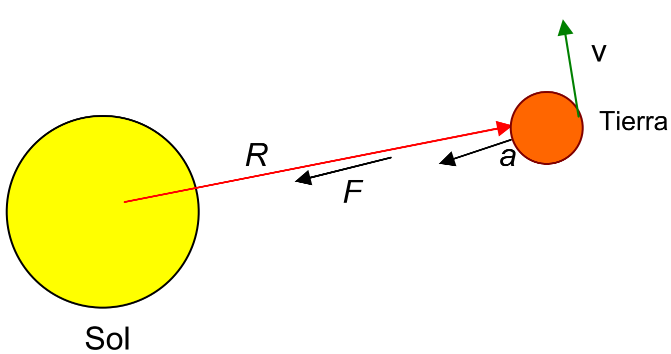
$\Rightarrow G.M = g.R^2$ (5)., ahora igualamos (4) y (5), tenemos:

ahora bien: $g_r \cong g.\left(\frac{R}{r}\right)^2$ de donde obtenemos

$r = R.\sqrt{\frac{g}{g_r}} = 6{,}37.10^3\,Km.\sqrt{\frac{9{,}8}{1}} = 19.941Km.$

$r - R = 19941 - 6370 = 13571Km$ o sea que el valor de $g = 1\,{}^{m}/_{s^2}$ se encuentra a los 13.571 Km.

Pb. 9. 03.- Volkenshtein.
Hallar la velocidad lineal del movimiento orbital de la Tierra, considerar que la órbita es circular:



M_s = masa del Sol

M_T = masa de la Tierra

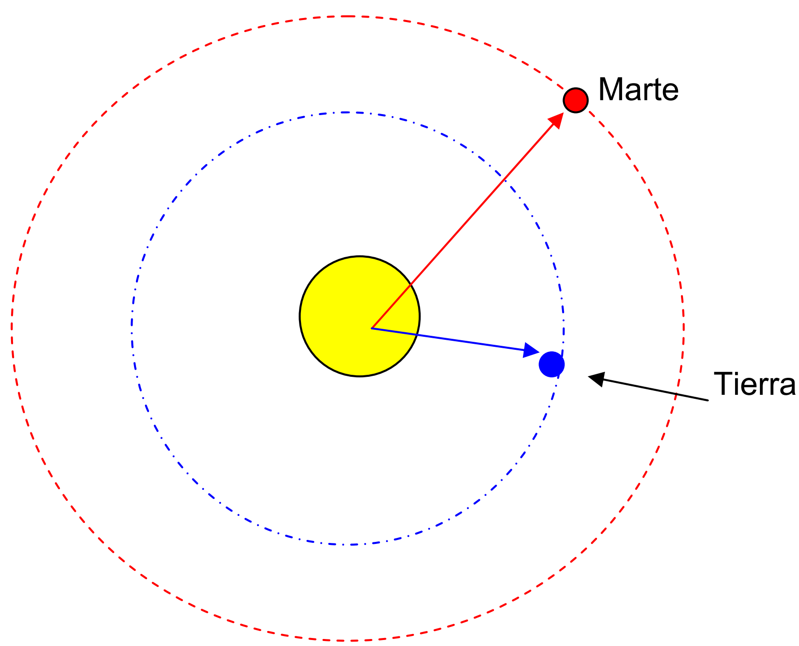
r = 1,5x10^{11} (m)

$F' = m.a_r = M_T.\frac{v^2}{R}$ (1) y la fuerza de gravitación Universal es $F = G\frac{M_s.M_T}{r^2}$ (2)

de (1) y (2) igualando tenemos: $M_T.\frac{v^2}{r} = G.\frac{M_s.M_T}{r^2}$, de esta igualdad, despejamos la rapidez:

$v\sqrt{\frac{G.M_s}{r}} \cong 30 km/s.$, ésta velocidad también se la puede calcular de la siguiente manera: $v = \frac{2.\pi.r}{T} \cong 30 \, {}^{km}\!/_{s}$
aquí consideramos la cantidad de días de un año.

Pb. 9. 04.- Resnick.
La distancia media de Marte desde el Sol es 1,524 veces la de la Tierra desde el mismo. Encontrar el número de años requerido para que Marte haga una revolución alrededor del Sol.



Para cualquier planeta orbitando alrededor del Sol, debe ser:

$M_p.\frac{v^2}{r} = \frac{G.M_p.M_s}{r^2}$., donde M_s= masa del Sol, y $M_p =$masa del planeta., y $r =$distancia media al Sol., donde la rapidez es:

$v_p = \sqrt{\frac{M_p.M_s}{r^2}.\frac{r}{M_p}}$.,$\Rightarrow v_p = \sqrt{G.\frac{M_s}{r}}$., como podemos observar que al velocidad del planeta alrededor del Sol es independiente de su masa, y si relacionamos con la velocidad de la tierra será:

$v_M =$velocidad de Marte.

$v_T =$ velocidad de la Tierra.

$\frac{v_M}{v_T} = \frac{\sqrt{\frac{G.M_S}{R_M}}}{\sqrt{\frac{G.M_S}{R_T}}} = \sqrt{\frac{R_T}{R_M}}$., por lo que ahora despejamos la velocidad de Marte y obtenemos:

$$v_M = \frac{v_T}{\sqrt{\frac{R_M}{R_T}}} \qquad (1)$$

y relacionando los periodos tanto de Marte como lo de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, obtenemos:

$T_T = \frac{2.\pi.R_T}{v_T} =$ un año terrestre.

$T_M = \frac{2.\pi.R_M}{v_M}$ = periodo de Marte, ahora relacionando ambos periodos tenemos:

$\frac{T_M}{T_T} = \frac{\frac{2.\pi.R_M}{v_M}}{\frac{2.\pi.R_T}{v_T}} = \frac{R_M}{R_T}.\frac{v_T}{v_M}$., bien ahora en esta ecuación reemplacemos la velocidad de Marte por la ecuación que se relacionaba con la velocidad de la Tierra (1):

$$\frac{T_M}{T_T} = \frac{R_M}{R_T} \cdot \frac{(v_T)}{\frac{(v_T)}{\sqrt{\frac{R_M}{R_T}}}} = \frac{R_M}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{R_M}{R_T}}$$., ahora despejamos el periodo de Marte.

$$T_M = T_T \cdot \left(\frac{R_M}{R_T} \right)^{3/2} = 1 año (1{,}52)^{3/2}$$ = 1,881 año terrestre = 22,57 meses.

Pb. 9. 05.- Volkenshtein.
Hallar la aceleración radial con que se moverá un satélite artificial de la Tierra por una órbita circular que se encuentra a 200 Km. de altura sobre la superficie del Planeta.

Solución:

Para calcular la aceleración radial es: $a_{rad} = \frac{v^2}{r}$., empleando la segunda ley de Newton y la ecuación de la fuerza gravitatoria, igualando las fuerzas, obtengo:

$m_S . a_{rad} = G \frac{M_T . m_S}{r^2}$., por lo tanto tenemos que $a_{rad} = \frac{G.M_T}{r^2}$.

$m_S =$ masa del satélite.
$M_T = 5{,}97.10^{24} kg.$
$r_T = 6{,}370.10^6 m.$ al radio de la Tierra se le debe agregar los 200 Km. que se encontrará el satélite.
La aceleración radial que experimentará el satélite es $a_{rad} = 9{,}22 \, m/s^2$., ligeramente inferior a $9{,}8 \, m/s^2$ en la superficie terrestre.

Pb. 9. 06.- Sears.
La masa de la Luna es de cerca 1/81 lo de la Tierra, y su radio es ¼ del de la Tierra, calcule la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la luna con esos datos.

Solución:

$m_L = \frac{1}{81} M_T$

$F = m_C . g$ (1)

$F = \frac{G.M_L . m_c}{r^2}$ (2)

$$r_L = \frac{1}{4}.R_{T.}$$

igualando las fuerzas de (1) y (2), obtenemos que:

$m_C.g_L = G.\frac{M_L}{r^2}$., despejando y reemplazando los valores :

$g_L = \frac{G.\frac{1}{81}.M_T}{\left(\frac{1}{4}R_T\right)^2} = 1{,}94\, m/s^2$., la gravedad en la superficie de la Luna, de acuerdo con los apéndices de textos es de 1,67 m/s^2, pero como el problema parte de aproximaciones, el resultado es aceptable.

Pb. 9. 07.- Sears.
En una medición de G, usando la balanza de Cavendish, se observó que una esfera de 0,800 Kg. atrae a otra de 4x10^{-3} Kg., con una fuerza de 1,30x10^{-10} N, cuando la distancia entre sus centros es de 0,0400 m. La aceleración sobre la superficie terrestre es de 9,8 m/s^2, y el radio de la Tierra es de 6380 Km., calcule la masa de la Tierra con esos datos.

Solución:
Con los datos aportados por el problemas debemos primeramente calcular el valor de nuestra G´., para lo cual recurrimos a la 2da. Ley de Newton y la Ley de la Gravitación Universal:

$F = m_C.g.,\Rightarrow (1)$

$F = G\frac{M_T.m_C}{r^2}.,\Rightarrow (2)$ ahora despejamos $G = \frac{F.r^2}{m_1.m_2} = 6{,}5.10^{-11}\, N.m^2/kg^2$. (3).

reemplazando las masas de la fórmula general por las masas usadas en la balanza de Cavendish, con el dato de G´, pasamos a calcular la masa de la Tierra, igualando las F de (1) y (2) y tenemos:

$g = \frac{G.M_T}{r^2}$ y ahora despejamos la incógnita $M_T = \frac{g.r^2}{G} = 6{,}1.10^{24}\, kg.$

Pb. 9. 08.- Sears.
Los cometas viajan alrededor del Sol en órbitas elípticas de gran excentricidad, si un cometa tiene una rapidez de 2,0 x 10^4 m/s, cuando esta a una distancia de 3,0 x 10^{11} m del centro del Sol. ¿qué rapidez tiene cuando esta a 4 x 10^{10}m?.

Solución:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

igualando las F y reemplazando la a_r. obtenemos:

$$F = G.\frac{M_S.m_C}{r^2}$$

$$F = m_C.a_{r.}$$

$v_1^2 = G.\dfrac{M_S}{r_1}$, para su primera velocidad del cometa y para la segunda:

$v_2^2 = G.\dfrac{M_S}{r_2}$., ahora bien despejamos M_S, de ambas ecuaciones e igualamos para eliminar esta incógnita y a su vez tenemos las relaciones de las velocidades:

$$M_S = \frac{v_1^2.r_1}{G}$$

$$M_S = \frac{v_2^2.r_2}{G}$$

de allí obtenemos: $\dfrac{v_1^2.r_1}{G} = \dfrac{v_2^2.r_2}{G}$., de donde $v_2^2 = \dfrac{v_1^2.r_1}{r_2}$, por lo tanto

ahora tenemos que $v_2 = \sqrt{\dfrac{v_1^2.r_1}{r_2}} = v_1\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}$., reemplazando por los datos del problemas tenemos que:

$v_2 = 5{,}48.10^4\ m/s$, cumpliéndose con la 2da. ley de Kepler, ya que a menor radio, la velocidad es mayor.

El tema de la gravitación es muy importante para aquel geólogo que se dedique a la Astrogeología, o los que estén interesados en determinar porque nuestro planeta tiene agua en abundancia, siendo los cometas cuerpos celestes que se encuentran constituido por hielo y un probable impacto con uno de ellos, cuando aún la Tierra se encontraba incandescente haya sido la causa de la formación de los Océanos, o aquellos que están de acuerdos con que los Dinosaurios se extinguieron por un impacto de un meteorito, etc.

TEMA 10
MECANICA DE LOS FLUIDOS

Introducción: Un fluido es cualquier sustancia que puede fluir, tanto líquidos como gases (en este caso solo estudiaremos a líquidos), en primer lugar se abordará al fluido en reposo y posteriormente cuando este se encuentre en movimiento. Para lo cual repasaremos conceptos importantes como ser. La densidad es masa por unidad de volumen; la presión es la fuerza normal por unidad de área; la viscosidad es una fricción interna en un fluido.

La unidad en el SI de la presión es el pascal, donde:

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1\text{N/m}^2.$$

La presión atmosférica $\boldsymbol{p_a}$ es la presión de la atmósfera terrestre y que varia con el clima y con la altura.

La presión atmosférica normal a nivel del mar es de 1 *atmósfera* (atm).

$$(p_a)\text{med} = 1 \text{ atm} = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa}.$$
$$= 1{,}013 \text{ bar} = 1013 \text{ milibar} = 14{,}70 \text{ lb/in}^2.$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}, \text{ por lo que el milibar} = 100 \text{ Pa}.$$

$p = p_0 + \rho.g.h$ (presión en un fluido de densidad uniforme)

Donde: p = presión a una profundidad h.
p_0 = presión en la superficie.
ρ = la densidad del fluido.
g = gravedad.

El exceso de presión por encima de la atmosférica suele llamarse **presión manométrica**, y la presión total se llama **presión absoluta**, (ejemplo la presión en un neumático).

Ecuación de Continuidad: $A_1.V_1 = A_2.V_2$., por lo que el área por la velocidad en un primer instante es igual a el área por la velocidad en un segundo instante, en otras palabras, la masa de un fluido en movimiento no cambia al fluir.

Ecuación de Bernoulli: $p_1 + \rho.g.y_1 + 1/2\rho.v_1^2 = p_2 + \rho.g.y_2 + 1/2\rho.v_2^2$.

Viscosidad: es la fricción interna en un fluido, las fuerzas viscosas se oponen al movimiento. El flujo del fluido donde la rapidez varía por capa recibe el nombre de flujo laminar. En los líquidos la viscosidad proviene de las fuerzas intermoleculares de cohesión. A medida que aumenta la temperatura, disminuye el coeficiente de viscosidad de un líquido porque el incremento de la energía cinética debilita el efecto de las fuerzas intermoleculares.

Definimos viscosidad del fluido como la relación entre el esfuerzo cortante, *F/A*, y la razón de la deformación: η(“eta”).

$$\eta = \frac{EsfuerzoCor\tan te}{RazónDeDeformación} = \frac{F/A}{v/l}$$ (definición de viscosidad)

v = rapidez de la superficie móvil.
l = longitud.

La unidad de viscosidad es la de fuerza por distancia, dividida entre área por rapidez.

$$1N.m/\left[m^2.\left(m/s\right)\right] = 1N.s/m^2 = 1Pa.s.$$

la correspondiente unidad en el cgs, 1 dina.s/cm^2, es la única unidad de viscosidad de uso común; se le llama **poise** en honor del científico francés Jean Louis Marie Poiseuille.

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ din.s/cm}^2 = 10^{-1}\text{N.s/m}^2.$$

También se usa el **centipoise** y el **micropoise**. La viscosidad del agua es de 1,79 centipoise a 0^{o}C y de 0,28 centipoise a 100^{o}C. Los aceites lubricantes suelen tener viscosidades de 1 a 10 poise, y la del aire a 20^{o}C es de 181 micropoise.

Turbulencia: Una corriente de fluido que atraviese un obstáculo se divide en remolinos y vórtices, dando al flujo componentes irregulares de velocidad transversales a la dirección del flujo.

En un fluido viscoso, el flujo a baja velocidad puede considerarse laminar, lo cual indica la presencia de capas que se resbalan suavemente una sobre otra. Cuando la rapidez de flujo es bastante alta, el movimiento se vuelve desordenado e irregular, es el flujo turbulento.

$$Vc = R\frac{\eta}{\rho.D}$$

$$R = \frac{\rho.D.V}{\eta}$$

R es la constante adimensional conocida como ***número de Reynolds.,*** éste puede servir para caracterizar un flujo cualesquiera, y es posible determinar experimentalmente en qué valor el flujo se vuelve turbulento.

Vc = rapidez crítica.
η = viscosidad.
ρ = densidad.

De esta ecuación también se puede deducir que la rapidez crítica del flujo aumenta con la viscosidad.

Metodología para resolver problemas:

En el caso de los fluidos estacionados se toma siempre en cuenta los empujes que estos realizan sobre los cuerpos, los pesos y volúmenes, luego se procede a igualar y desarrollar las ecuaciones.

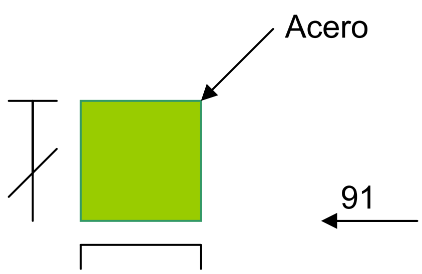
En el caso de fluidos en movimiento, en algunos problemas tendremos que usar la ecuación de continuidad, siempre que tengamos que resolver una relación entre las dos velocidades en términos de las áreas de las secciones transversales de los tubos o recipientes.

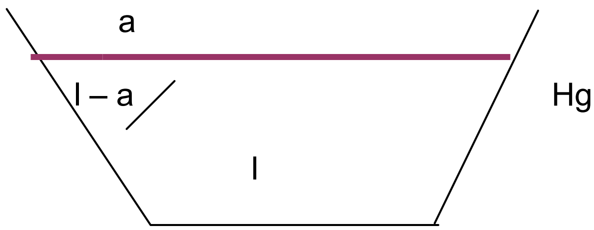
Cuando tengamos que resolver incógnitas que se encuentran en la ecuación de Bernoulli, recordemos que tenemos constantes que son la densidad y g, entonces que mas datos tenemos y cual es la incógnita que debemos determinar, y tener en cuenta que todas las presiones deben ser: todas absolutas o manométricas.

PROBLEMAS:

Pb. 10. 01. Sears.
Un bloque cúbico de acero (densidad 7,8 g/cm^3) flota en mercurio (densidad 13,6 g/cm^3)., a)¿Qué fracción del bloque queda por encima de la superficie del mercurio?., b) Si se vierte agua sobre la superficie del mercurio, ¿qué profundidad ha de tener la capa de agua para que la superficie libre de ésta alcance la cara superior del bloque?.

a)





en este caso igualamos el empuje hidrostático (de abajo hacia arriba) con el peso del cuerpo, para establecer el equilibrio estático, masa igual a volumen por densidad, y el peso es igual a la masa por gravedad, entonces tenemos:

$(l-a).l^2.\rho_{Hg}.g = \rho_{Ac}.l^3.g$

en otras palabras decimos que el peso de la sección del bloque sumergido en el mercurio es igual al peso del bloque en el aire.
Ahora bien pasamos a resolver la igualdad:

Simplificando la longitudes, tenemos:

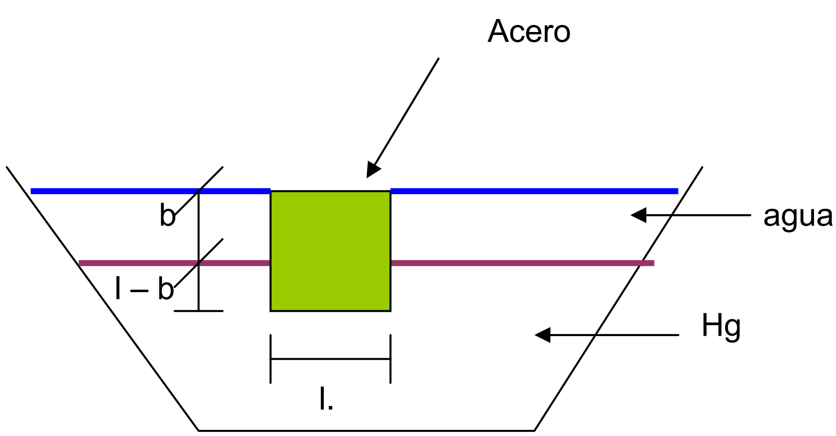
$(l - a).\rho_{Hg}.g = \rho_{Ac}.l.g$, simplificando las g y agrupando las densidades

$(l-a) = \rho_{Ac}.\dfrac{l}{\rho_{Hg}}$ ahora pasamos a l al otro miembro y hacemos distributiva y nos queda:

$1-\dfrac{a}{l} = \dfrac{\rho_{Ac}}{\rho_{Hg}}$ ahora resolvemos el porcentaje que emerge el bloque el mercurio haciendo pasaje de término y queda:

$\dfrac{a}{l} = 1-\dfrac{\rho_{Ac}}{\rho_{Hg}} = 1-\dfrac{7.8}{13,6} = 0,43$ o sea que emerge el 43%.

b)



En este caso establecemos el equilibrio considerando que el empuje de Arquímedes está integrado por el del Hg y el del Agua:

$(l - b).l^2\rho_{Hg}.g + b.l^2\rho_{Ag}.g = \rho_{Ac}.l^3.g.$

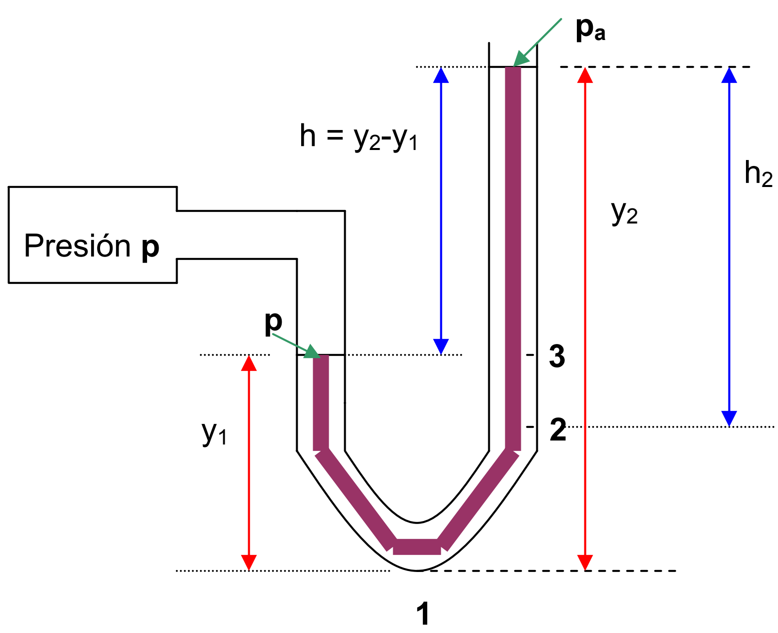
en otras palabras es que el peso del bloque sumergido en el mercurio más el peso del bloque sumergido en el agua es igual al peso del bloque en el aire.

$(1 - b/l)\rho_{Hg} + b/l.\rho_{Ag} = \rho_{Ac}.$

por lo que: $\boxed{\frac{b}{l} = \frac{\rho_{Hg} - \rho_{Ac}}{\rho_{Hg} - \rho_{Ag}} = 0{,}46}$ o sea que está cubierta por el agua es un 46%.

Pb.10. 02.-

El líquido en el manómetro abierto de la figura es mercurio, en y_1 = 3,6cm, y_2 = 9cm. La presión atmosférica es de 970 milibares, a)¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tubo en U?., b)¿Cuál es la presión absoluta en el tubo abierto a una profundidad de 7,2 cm por debajo de la superficie libre., c)¿Cuál es la presión absoluta del gas contenido en el depósito?., d)¿Cuál es la presión manométrica del gas en centímetros de mercurio?.



datos: y_1 = 3cm., y_2 = 9cm., p_a = 1013mb., ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3., ρ_{agua} = 1 g/cm^3.,

incógnitas: a) p_1 = ? (dinas/cm^2).

b) p_2 = ? (mmHg)., h_2 = 7,2 cm.,

c) p = ? (cmH_2O).

d) p_m = ? (cm de Hg).
e) p_m = ? (cm H_2O)

Solución:

a) El problema nos solicita la presión que soporta la columna en el punto 1 (en el fondo del tubo), por lo tanto podemos decir que la presión en ese punto es igual a la presión atmosférica que se encuentra sobre el tubo abierto mas la presión de la columna de mercurio cuya altura esta dada por y_2, por lo que tenemos que:

$p_1 = p_a + \rho.g.y_2$.

la presión atmosférica es : 1013 (mb)

1 (bar) = 10^6 (dina/cm^2) = 10^5 Pa., y 1(mb) = 10^{-3}(bar)

1(bar) = 1000(mb)

1 atm = 1,013 . 10^5 Pa = 1,013 bar

1 mmHg = 1 torr = 133,3 Pa.

$$1[mb] = 10^{-3}[bar].\frac{10^6\left[\frac{dina}{cm^2}\right]}{1[bar]} = 10^3\left[\frac{dina}{cm^2}\right]$$

$$p_1 = 1{,}013.10^6\left[\frac{dina}{cm^2}\right] + 13{,}6\left[\frac{g}{cm^3}\right].980\left[\frac{cm}{s^2}\right]9[cm] = 1{,}1329.10^6\left[\frac{dina}{cm^2}\right] = 1132{,}9[mb]$$

b) ahora nos solicita cual es la presión absoluta en el punto 2, a 7,2 cm por debajo de la superficie libre del tubo.

$p_2 = p_a + \rho.g.h_2$.

$$p_2 = 1{,}013.10^6\left[\frac{dina}{cm^2}\right] + 13{,}6\left[\frac{g}{cm^3}\right].980\left[\frac{cm}{s^2}\right]7{,}2[cm] = 1{,}10896.10^6\left[\frac{dina}{cm^2}\right] = 1108{,}96[mb]$$

entonces tenemos que 1108,96 (mb) = 832 mmHg.

esto es porque 760 (mmHg) = 1013,(mb)

c) en este punto nos solicita la presión absoluta del gas contenido en el depósito, que no es otra cosa que la presión p, o en otras palabras la presión en el punto 3, es donde la columna de mercurio del lado izquierdo se encuentra en equilibrio con la columna derecha, por lo tanto tenemos:

$p_3 = p_a + \rho.g.h.$, esta altura $h = y_2 - y_1$.

$$p_3 = p = 1{,}013.10^6\left[{}^{dina}\!/_{cm^2}\right] + 13{,}6\left[{}^{cm}\!/_{s^2}\right]980\left[{}^{cm}\!/_{s^2}\right]5{,}4[cm] = 1{,}08497.10^6\left[{}^{dina}\!/_{s^2}\right]$$

d) la presión manométrica del gas: es la presión absoluta menos la presión atmosférica:

$$p - p_a = 1{,}08497.10^6\left[{}^{dina}\!/_{cm^2}\right] - 1{,}013.10^6\left[{}^{dina}\!/_{cm^2}\right] = 0{,}07197.10^6\left[{}^{dina}\!/_{cm^2}\right]$$

$$0{,}07197.10^6\left[{}^{dina}\!/_{cm^2}\right] = 0{,}07197.10^3[mb] \approx 54[mmHg] = 5{,}4[cmHg]$$

ahora bien si esto lo queremos pasar a pascales, tenemos que:

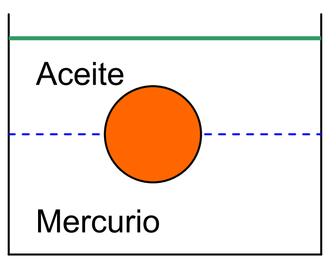
1 dina/cm^2 = 0,1 Pa

$$0{,}07197.10^6\left[{}^{dina}\!/_{cm^2}\right] = 71{,}97.10^3\left[{}^{dina}\!/_{cm^2}\right] = 7{,}197.10^3\,Pa.$$

Pb.10. 03.-

Se llena un recipiente con mercurio y luego con aceite. Una pelota flota con exactamente su mitad sumergida en el mercurio. Calcule el peso específico de la pelota. El del aceite es 0,9 (gf/cm^3) y el del mercurio es 13,6 (gf/cm^3).

El volumen de la pelota es V.



Empuje hidrostático del aceite es : $E_A = ½.V.\delta_A$

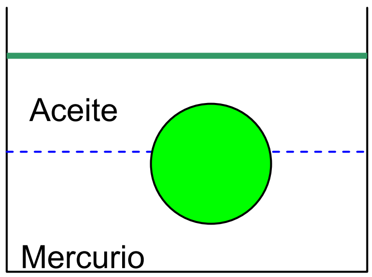
Empuje hidrostático del mercurio es: $E_M = ½.V.\delta_M$.

Peso de la pelota esta dado por: $V.\rho_p$.

Hay equilibrio estático: $V.\delta_p = {}^{1}\!/_{2}V(\delta_A + \delta_M)$

$$\delta_p = \frac{\delta_A + \delta_M}{2} = \frac{0{,}9 + 13{,}6}{2} = 7{,}25\left[{}^{gf}\!/_{cm^3}\right]$$

Pb.10. 04.-
Una pelota sólida y uniforme flota entre dos líquidos inmiscibles. El volumen de la pelota es V, el líquido de arriba es aceite de peso específico 0,9 g/cm^3, y abajo hay mercurio de peso específico 13,6 g/cm^3., y la pelota es de acero de peso específico 7,7 g/cm^3. ¿Qué fracción del volumen V flota sobre el líquido inferior y cuanto está sumergida en el aceite?.



La proporción del volumen total V que está Inmersa en el líquido de arriba es: $p_1.V$

Y la del de abajo es: $p_2.V$.

Así será: $p_1 + p_2 = 1$

Ahora bien tenemos: $p_1.V + p_2.V = V$

Los empujes hidrostáticos valen: $E_1 = p_1.V.\delta_1$, y $E_2 = p_2.V.\delta_2$.
Y el peso de la pelota es: $V.\delta$. (volumen por el peso específico).
Como hay equilibrio, tenemos que: $V.\delta = p_1.V.\delta_1 + p_2.V.\delta_2$.
Simplificando los volúmenes tenemos:

$\delta = p_1.\delta_1 + p_2.\delta_2$ (a) y como es $1 = p_1 + p_2$,

pero tenemos que:

$p_2 = 1 - p_1$ y

$p_1 = 1 - p_2$. reemplazando estas en la ecuación (a) tenemos:

$\delta = (1 - p_2).\delta_1 + \delta_2.p_2 = \delta_1 - p_2.\delta_1 + \delta_2.p_2.$

$\delta - \delta_1 = p_2(\delta_2 - \delta_1)$., $\boxed{p_2 = \dfrac{\delta - \delta_1}{\delta_2 - \delta_1}}$

y para p_1, nos queda: $\boxed{p_1 = \dfrac{\delta - \delta_2}{\delta_1 - \delta 2}}$

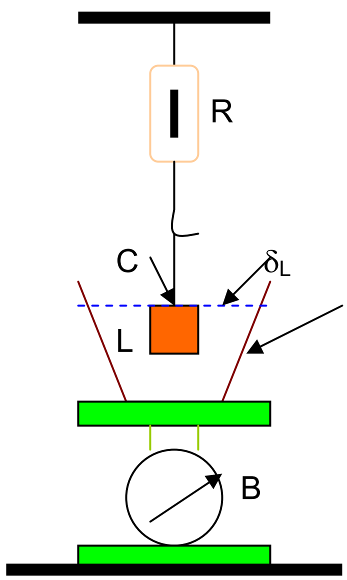
$$p_2 = \frac{(7,7-0,9)\left[{}^{gf}\!/_{cm^3}\right]}{(13,6-0,9)\left[{}^{gf}\!/_{cm^3}\right]} = 0,535 \Rightarrow 53,5\%$$

o sea el 53,5% de la esfera está sumergida en el mercurio.

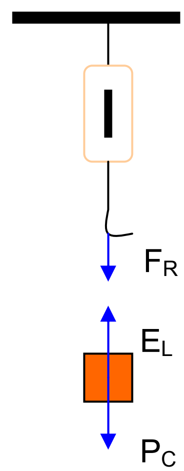
$$p_1 = \frac{(7,7-13,6)\left[{}^{gf}\!/_{cm^3}\right]}{(0,9-13,6)\left[{}^{gf}\!/_{cm^3}\right]} = 0,465 \Rightarrow 46,5\%$$

o sea que el 46,5% de la esfera está sumergida en el aceite.

Pb.10. 05.- Sears.
El bloque de la figura está suspendido, mediante una cuerda, de una balanza de resorte R, y se encuentra sumergido en un líquido L contenido en el vaso V. El peso del vaso es de 2 lbf, y el del líquido es de 3 lbf. La balanza R indica 5 lbf y la B, 15 lbf. El volumen del bloque C es 0,1 ft3., a)¿cuál es el peso, en gf, de un cm3 de líquido?., b)¿Qué indicará cada balanza si se saca el bloque C fuera del líquido?.
Solución:



a) Sistema 1



En el caso a) consideramos (Sistema 1) que la resultante de todas las fuerzas dan la resultante F_R sobre la balanza R, en el sistema, entonces es:

(1) $F_R = P_C - E_L$

P_C = peso del cuerpo C.,
E_L = empuje del líquido.

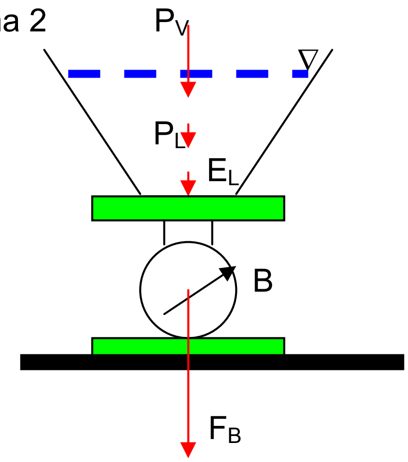
donde el empuje hidrostático el líquido sobre el cuerpo, aplicado en el cuerpo vale:

(2) $E_L = V_C.\delta_L$.,

En el sistema 2, la resultante de las fuerzas es:

(3) $F_B = P_V + P_L + E_L$.

b) Sistema 2



Aquí actúa también EL pero como reacción del EL del sistema 1, pues aquí es EL la fuerza del cuerpo sobre el líquido, aplicada en el líquido. Sumando (1) y (3), es:

$$F_R + F_B = P_C + (P_V + P_L)$$

y de aquí: (4) $P_C = (F_R + F_B) - (P_V + P_L)$

sustituyendo en (1), y en esa la (2), es:

$$F_R = F_R + F_B - (P_V + P_L) - V_C.\delta_L$$

, de donde:

$$\delta_L = \frac{F_B - (P_V + P_L)}{V_C} = \frac{15 - (2+3)}{0{,}1} = 100\left[{}^{lbf}\!/_{ft^3}\right]$$

$$\delta_L = 100\left[{}^{lbf}\!/_{ft^3}\right].\frac{453{,}6[gf]}{1[lbf]}.\frac{1\left[ft^3\right]}{30{,}48\left[cm^3\right]} = 1{,}6\left[{}^{gf}\!/_{cm^3}\right]$$

en el caso b) es:

$E_L = 0$; las ecuaciones (1), (3) y (4), nos dan: $F_R´ = (5+15) - (2+3) = 15$ (lbf)

$F_B´ = 2+3 = 5$ (lbf).

Pb.10. 06.- Resnick.
Un tubo de 34,5 cm de diámetro lleva agua que se desplaza a 2,62 m/s.,¿Cuánto tardara en descargar 1600 m^3 de agua.

Solución:
Aquí empleamos la ecuación de la continuidad.

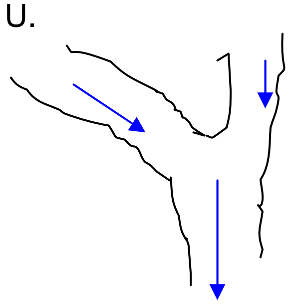
$A_1.V_1 = A_2V_2$. donde el área por la velocidad en un primer instante es igual al área por la velocidad en un segundo instante.

$A_t.V_t$ = Q (caudal)., o sea que el área del tubo por la velocidad que hay en èl es igual al caudal, o sea m^3/s., de donde:

$A_t.V_t = m^3/T$, de donde despejamos tiempo y como el área de un circulo es $\pi.r^2$:

$$T = m^3/A_t.V_t = \frac{1600[m^3]}{3{,}14.(0{,}35m)^2.2\, m/s} = 2139{,}03s = 36\,\text{min}\,utos$$

Pb.10. 07.- Resnick. (modificado).
La figura muestra la confluencia de 2 corrientes que forman un río, una corriente mide 8,2 m de ancho, y 3,4 m de profundidad; su rapidez es de 2,3 m/s. La otra mide 6,8 m de ancho y 3,2 m de profundidad; fluye a 2,6 m/s. El ancho del rìo es de 10,7m y la rapidez de la corriente es de 2,9 m/s, ¿cuál será su profundidad? Si ambas corrientes corren por afluentes de un estadio juvenil y por lo tanto su perfil es en V, mientras que el río donde confluyen tiene un estadio maduro, o sea un perfil en U.



Solución:

$A_1.V_1 + A_2.V_2 = A_R.V_R. = a_R.p_R.V_R.$, siendo a = ancho y p = profundidad.

$$p_R = \frac{A_1.V_1 + A_2.V_2}{a_R.V_R} = \frac{\frac{(8{,}2.3{,}4)m^2}{2}.2{,}3[m/s] + \frac{(6{,}8.3{,}2)m^2}{2}.2{,}6\, m/s}{10{,}7(m).2{,}9(m/s)} = 1{,}9448m.$$

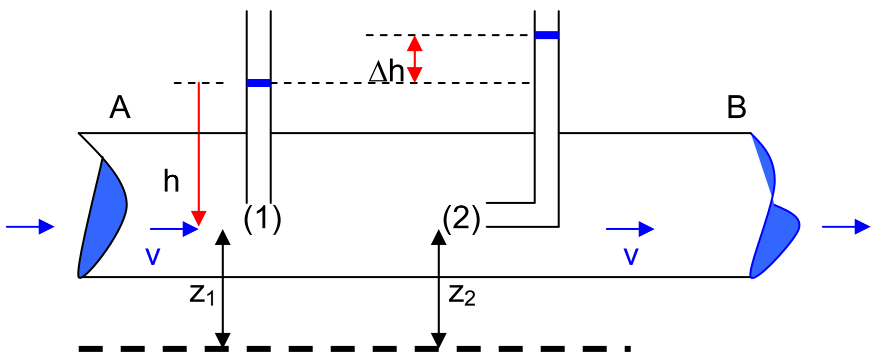
Pb.10. 08.- Resnick.
Un río de 21 m de ancho y 4,3 m de profundidad drena un terreno de 8,500 km^2, donde la precipitación pluvial promedio es de 48 cm/año. Una cuarta parte de la precipitación vuelve a la atmósfera por evaporación, pero el resto llega finalmente al río, ¿cuál es la velocidad promedio del río?.

Solución:
$A_R.V_R = m^3/T.$, donde el tiempo es igual a 1 año = $31{,}54.10^6$ segundos.

$V_R = m^3/T.A_R. = 1{,}07$ m/s.

Pb.10. 09.- Volkenshtein.
Por un tubo horizontal AB escurre un líquido. La diferencia de niveles de este líquido en los tubitos a y b es igual a 10 cm. Los diámetros de él son iguales. Hallar la velocidad de la corriente del líquido en el tubo A.

Solución:
Escribiendo la ecuación de Bernoullí en los puntos (1) y (2) resultan ser la constante igual por estos dos puntos en la misma línea de corriente.



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho.v_1^2 + \rho.z_1.g = p_2 + \frac{1}{2}\rho.v_2^2 + \rho.z_2.g.$$

pero es: $p_1 = \rho.g.h + p_a$; $v_1 = v$; $\begin{matrix} z_1 = z_2 \\ v_2 = 0 \end{matrix}$

$$p_2 = \rho.g(h + \Delta h) + p_a$$

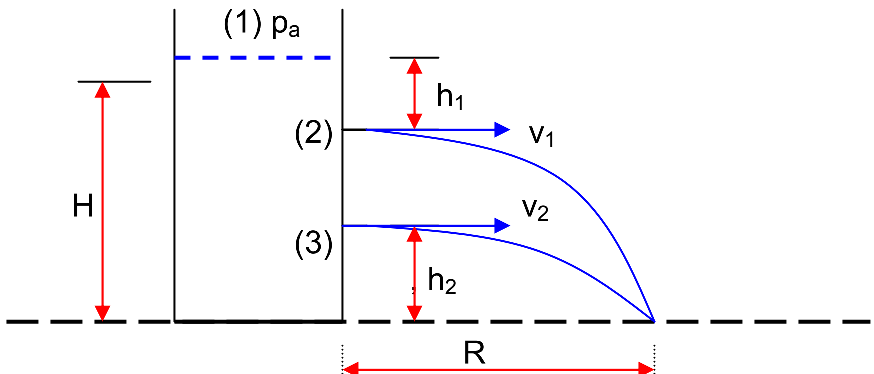
resulta: $\rho.g.h + \frac{1}{2}.\rho.v^2 = \rho.g.h + \rho.g.\Delta h.$

simplificando queda: $v = \sqrt{2.g.\Delta h} = \sqrt{2.980\left[{cm}/{s^2}\right].10[cm]} = 1{,}4\left[{m}/{s}\right]$

Pb.10. 10.- Sears.

El agua alcanza una altura H en un depósito grande, abierto, cuyas paredes son verticales, según la fig. Se practica un orificio en una de las paredes a una profundidad h, por debajo de la superficie del agua.

a)¿A qué distancia R del pie de la pared alcanzará el suelo el chorro de agua que sale por el orificio?., b)¿A qué altura por encima del fondo del depósito ha de practicarse un segundo orificio para que el chorro que sale de él tenga el mismo alcance que el anterior?.



Entre (1) y (2), en estos puntos empleamos la ecuación de Bernoullí, toda vez que podemos imaginar que pertenecen al mismo filete de corriente y tomando como plano horizontal de referencia de las alturas el que pasa por (2):

$$p_a + \rho.g.h + \tfrac{1}{2}\rho.v^2 = p_a + \rho.g.h + \tfrac{1}{2}\rho.v^2 .$$

Lo que tenemos aquí es los siguiente: en el punto (1) la velocidad es insignificante con respecto al punto (2), por lo que se desecha y v = 0, y en el punto (2) que es nuestro nivel de referencia para el análisis de este primer cálculo, no tenemos altura o sea h = 0., y como la presión atmosférica se encuentra en los dos puntos en cuestión se simplifica, por lo tanto tenemos:

$$\rho.g.h_1 = \tfrac{1}{2}\rho.v^2 .,\Rightarrow v = \sqrt{2.g.h_1} \qquad \text{(a)}$$

he aquí que una partícula líquida que sale por (2) a la velocidad v, llega a R en un tiempo t., pero como a partir del punto de salida la partícula se comporta como en una trayectoria de un proyectil, cuya situación es que la velocidad de salida es V_x, y por lo que:

$$R = v.t.,\Rightarrow t = \frac{R}{v}$$

$$H - h_1 = \tfrac{1}{2}.g.t^2 .,\Rightarrow H - h_1 = \tfrac{1}{2}.g.\frac{R^2}{v^2}.,\Rightarrow R^2 = \frac{2(H-h_1)v^2}{g}$$

$$R = 2\sqrt{h_1(H-h_1)} \qquad \text{(b)}$$

y ahora analizamos la partícula que sale por el punto (3), será idénticamente que en el punto anterior, por lo que:

$$v_2 = \sqrt{2.g(H - h_2)}$$

y de acuerdo a (b) su alcance R será:

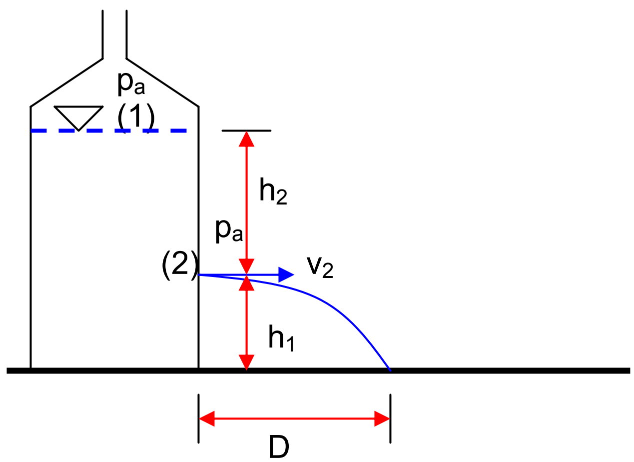
$$R_2 = 2\sqrt{(H - h_2)h_2}$$

para que el alcance de R sea igual a R_2, deberá ser $h_1 = h_2$.

Pb.10.11.- Volkenshtein.

Sobre una mesa hay una vasija con agua. En la pared lateral de esta vasija hay un orificio pequeño situado a la distancia h_1 del fondo y a la distancia h_2 del nivel del agua. Este nivel se mantiene constante. ¿A qué distancia del orificio (en dirección horizontal) caerá sobre la mesa el chorro de agua?. Resolver para:

a) h_1 = 25 cm y h_2 = 16 cm.
b) h_1 = 16 cm y h_2 = 25 cm.



Si tomamos a los puntos (1) y (2) y el nivel de referencia es el punto (2) empleamos la ecuación de Bernoulli:

$$p_a + \rho.g.h_2 + \tfrac{1}{2}\rho.v_1^2 = p_a + \rho.g.h_0 + \tfrac{1}{2}\rho.v_2^2.$$

aquí tenemos que en el punto (1) la velocidad es muy inferior a la del punto (2), por lo tanto es igual a 0., y en el punto (2) como es nuestro nivel de referencia, no tenemos altura, por lo tanto es igual a 0., de allí que:

$$v_2 = \sqrt{2.g.h_2}.$$

una partícula de líquido sigue la trayectoria parabólica, entonces es:

$$h_1 = \tfrac{1}{2}g.t^2.; \qquad D = v_2.t$$

de estas dos ecuaciones tenemos que: $D = v_2.\sqrt{\dfrac{2.h_1}{g}}$

$$D=\sqrt{2.g.h_2\frac{2.h_1}{g}}=2\sqrt{h_1.h_2}.,\Rightarrow \boxed{D=2.\sqrt{h_1.h_2}}$$

con los datos aportado por el problema tenemos que para a) y b) la distancia D, es la misma.

$$\boxed{D=2\sqrt{16x25[cm]^2}=40[cm].}$$

TEMA 11

ESFUERZOS – ELASTICIDAD

Introducción: El Esfuerzo es la intensidad de las fuerzas que causan el estiramiento, aplastamiento o torsión, etc., y la Deformación es el cambio de forma.

Tanto el esfuerzo como la deformación son proporcionales sea que a mayor esfuerzo mayor deformación y a la constante de esa proporcionalidad se denomina Módulo de Elasticidad o también denominada Ley de Hooke.

Para esfuerzos de Tensión pequeños o sea que genera deformación por Tensión pequeñas, el módulo de elasticidad se denomina "Módulo de Young".

$$Y=\frac{F/A}{\Delta L/L}=\frac{F.AL}{A.\Delta L}$$

$\frac{F}{A}=$Esfuerzo de Tensión

$\frac{\Delta L}{L}=$ Deformación por tensión.

La unidad del módulo de elasticidad es el Pascal:

1 Pascal = 1Pa = 1 N/m^2

la deformación por compresión se define idénticamente que el de Tensión, lo que hay que tener presente es que ΔL es de signo contrario que en el de Tensión.

Esfuerzo y Tensión de Volumen

Cuando un cuerpo es sometido a un esfuerzo uniforme en todos los sentidos y su deformación es un cambio de volumen, se denomina Esfuerzo de Volumen y Deformación de Volumen, por ejemplo un sólido sumergido en un fluido, o el aire en un neumático.

La fuerza F_1 por unidad de área sobre cualquier superficie es la presión p en el fluido.

$$p = \frac{F}{A} \text{ (presión en un fluido)}$$

La presión es una cantidad escalar, no vectorial, no tiene dirección.

Deformación de volumen = $\frac{\Delta V}{V_0}$, cambio de volumen por unidad de volumen.

El módulo de elasticidad en este caso se denomina **"Módulo de Volumen":**

$B = \frac{-\Delta p}{\Delta V / V_0}$ el signo negativo es porque a un aumento de presión hay una disminución de volumen.

El recíproco del módulo de volumen se denomina **"Compresibilidad"**

$k = \frac{1}{B} = \frac{\Delta V / V_0}{\Delta p} = \frac{1}{V_0}.\frac{\Delta V}{\Delta p}$ y se mide en Pa^{-1}, op atm^{-1}.

Esfuerzo y Tensión de Corte

Una situación particular del esfuerzo sobre un cuerpo es un torcimiento o deformación del cuerpo y es producido no por una fuerza perpendicular a la superficie sino por una fuerza tangente.

Esfuerzo de Corte = $\frac{F_{\tan}}{A}$., Deformación por corte = $\frac{x}{h} = tag.\phi.$

Donde $x =$ desplazamiento que tuvo un punto paralelo a la dirección de la fuerza y $h =$ la longitud original tomada de un extremo del cuerpo y perpendicular a la fuerza actuante de donde se encontraba el punto desplazado.

$S = \frac{F_{\tan} / A}{x / h} = \frac{F_{\tan}.h}{A.x} = \frac{F_{\tan} / A}{\phi}$ (Módulo de corte).

En un material el módulo puede encontrarse entre 1/3 a ½ mayor que el módulo de Young.

Este tema es de interés en la geología, pues la deformación por corte tiene una gran similitud con los efectos de las fallas transcurrentes, cuando estas actúan generan una rotación de los cuerpos que se encuentran en las cercanías, como por ejemplo la falla transcurrente de la quebrada de Vis Vis, genero una rotación en el pórfido de Bajo Alumbrera, de una forma seguramente circular, lo transformo en un cuerpo elipsoide.

Elasticidad y Plasticidad

Elasticidad es la propiedad que tienen los cuerpos en virtud de la cual tienden a recuperar su forma o tamaño inicial luego de una deformación y al cesar las fuerzas exteriores que lo provocan.

Plasticidad: cuando un cuerpo es sometido a fuerzas exteriores y que provocan una deformación y que al cesar estas fuerzas el cuerpo no recupera su forma original, quedando una deformación permanente, a esto se lo denomina **flujo plástico** o **deformación plástica.**

El esfuerzo requerido para causar la fractura de un material se denomina **"Esfuerzo de Ruptura"** o resistencia a la Tensión.

Para resolver los problemas de este tema, es bastante sencillo, simplemente es la aplicación directa de las fórmulas aquí descriptas.

Problemas:

Pb. 11. 01. Sears.

El elevador de una mina esta sostenido por un solo cable de acero de 2,02 cm, de diámetro. La masa total del elevador más los ocupantes es de 900 kg.,¿en cuanto se estira el cable cuando el elevador esta suspendido a 45,0 m por debajo del motor del elevador?, desprecie la masa del cable.

Solución:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{F.L}{A.\Delta L}$$ = módulo de Young.

$$Y_{acero} = 20.10^{10}.N/m^2$$

$$F = m.g = 900kg.9{,}8\,m/s^2 = 8820N.$$

$$L = 45m$$

$$\Delta L = \frac{F.L}{A.Y} = \frac{8820N.45m}{3{,}2.10^{-4}.m^2.20.10^{10}\,N/m^2} \cong 6{,}2mm.$$

Pb. 11. 02.- Sears.

Un alambre circular de acero de 3mm, no debe estriarse mas de 0,2 cm cuando se aplica una tensión de 400N a cada extremo.¿Qué diámetro mínimo debe tener?.

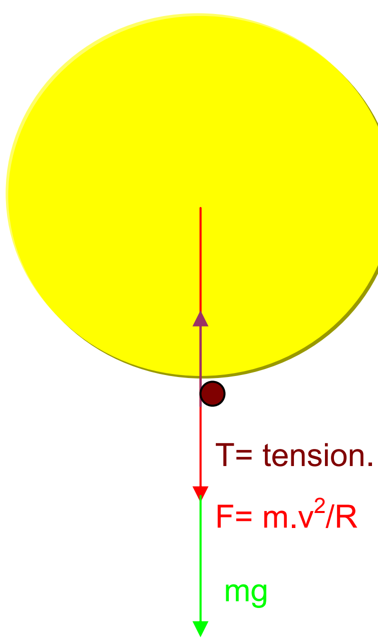
Solución:

$$A = \frac{F.L}{Y.\Delta L} = \pi.r^2 = \frac{F.L}{Y.\Delta L};\therefore \Rightarrow r = \sqrt{\frac{F.L}{Y.\Delta L.\pi}} 0,000977m.$$

$$diametro = 2.r = 1,95mm.$$

Pb. 11. 03. Sears.
Una masa de 15,0 kg, sujeta al extremo de un alambre de acero con longitud no estirada de 0,50m, se gira en un círculo vertical con una velocidad angular de 6,00 rev/s, en el punto más bajo del círculo. El área transversal del alambre es de 0,014 cm^2. calcule el alargamiento del alambre cuando la masa esta en el punto más bajo del círculo.

Solución:



$$T - m.g = m.\frac{v^2}{R}.,\quad T = m\left(g + \omega^2.R\right)$$

$$\omega = 6\,{}^{rev}\!/\!_{s} = 6.2\pi.rad = 37,68\,{}^{rad}\!/\!_{s}$$

$$T = 10795,368N = F$$

$$\Delta L = \frac{F.L}{A.Y} = 0,0192m = 1,92cm.$$

Pb. 11. 04.- Sears.
Una varilla elástica de 3,5 m de longitud y 1,5 cm^2 de sección se alarga 0,07 cm al someterla a una fuerza de tracción de 3000N. Calcular el esfuerzo y la deformación unitaria y el módulo de Young del material de dicha varilla.

Solución:

Esfuerzo = $\frac{F}{A} = \frac{3000N}{1,5cm^2} = 2000\,{}^{N}\!/\!_{cm^2}.$

Deformación unitaria: $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{0{,}07cm}{3{,}5.10^2\,cm} = 2.10^{-4}$

Módulo de Young: $\dfrac{2000\,{}^{N}\!/\!_{cm^2}}{2.10^{-4}} = 10^7\ {}^{N}\!/\!_{cm^2}$.

Pb. 11. 05.-
En el laboratorio de mecánica de roca se realiza un ensayo con un cubo de roca granítico, de 10 cm de lado, se somete a un esfuerzo cortante de 10 Tn, la cara superior del mismo se desplaza 0,03 cm con respecto de su posición original en el ensayo. Calcular el esfuerzo, la deformación y el módulo de corte correspondiente:

Solución:
$F = 10Tn = 10000kg.9{,}8 = 98000N$

Esfuerzo cortante $\dfrac{F}{A} = 9{,}8.10^3\ {}^{N}\!/\!_{cm^2}$

Deformación cortante: $\dfrac{desplazamiento}{altura} = \dfrac{0{,}03cm}{10cm} = 0{,}003$

Módulo de corte $S = \dfrac{esfuerzoCor\tan te}{deformaciónCor\tan te} = \dfrac{9{,}8.10^3\ {}^{N}\!/\!_{cm^2}}{0{,}003} = 3{,}27.10^6.\,{}^{N}\!/\!_{cm^{2.}}$

TEMA 11
OSCILACIONES

Introducción:
Un objeto que se desplaza en vaivén en torno a un punto fijo describe un movimiento oscilatorio, un caso especial es el movimiento armónico, que se repite en un ciclo regular.

En el movimiento armónico simple (MAS), la frecuencia, el periodo y la amplitud son las principales características. El movimiento que poseen el péndulo se aproxima al MAS.

La magnitud del desplazamiento máximo respecto al equilibrio recibe el nombre de **Amplitud del Movimiento,** se mide en m, y aquí la identificamos con **A**.

El tiempo necesario para completar un ciclo se denomina periodo ***T*** y se mide en segundos.

El número de ciclos por unidad de tiempo se denomina frecuencia ***f***; por lo tanto es inversa del periodo y se mide en **Hertz**, donde **1Hertz = 1 ciclos/s**.

La frecuencia angular ω, o sea las pulsaciones, que difiere de ***f*** en un factor de **2π.,** y se mide en radianes / segundo, o bien también podríamos decir cuantos radianes corresponden en un círculo de referencia.

$$f = \frac{1}{T}.,\Rightarrow T = \frac{1}{f} \qquad \omega = 2.\pi.f = \frac{2.\pi}{T}$$

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde: m = masa.
K = constante recuperadora.

Lo que podemos observar que el periodo T, es independiente de la amplitud y si depende de la masa y de la constante recuperadora.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega = 2.\pi.f = \sqrt{\frac{k}{m}}.,\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

el desplazamiento ***x***, esta dado por:

$$x = A.\cos(\omega.t + \phi)$$

ϕ = es el ángulo de fase, que nos indica en que punto del ciclo el movimiento se encontraba para un tiempo $t = 0$, por lo que si $t = 0$; para un x0, o sea su posición inicial , $x_0 = x$.

$x_0 = A.cos.\phi.$

la velocidad y la aceleración tenemos:

$v = -\omega.A.sen\ (\omega.t + \phi).$

$a = -\omega^2.A.cos\ (\omega.t + \phi)$

$v_o = -\omega.A.sen\ \phi$ (velocidad inicial)

$$A = \sqrt{x_0 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Energía en el Movimiento Armónico Simple:

La energía mecánica total en el MAS es igual a la suma de las Energía Cinética y la Energía Potencial.

$$E_{MT} = E_k + E_p = \frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k.x^2.$$

Cuando el desplazamiento se encuentra en un extremo, o sea $x = A$, la velocidad $v = 0$, entonces tenemos que la Energía Mecánica total es:

$$E_{MT} = E_p = \frac{1}{2}k.A^2.$$

$\frac{1}{2}m.v^2 + \frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}k.A^2 =$ constante.

De donde podemos decir que para un desplazamiento cualesquiera la velocidad es:

$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}.\sqrt{A^2 - x^2}$,   es $\pm$ para un valor de la velocidad en cualquier dirección, también cuando el cuerpo pasa por el punto de equilibrio, entonces $x = 0$, tenemos la velocidad máxima:

$$v_{\max.} = \sqrt{\frac{k}{m}}.A., \Rightarrow v_{\max.} = \omega.A.$$

en cambio la aceleración máxima, la obtenemos cuando la velocidad $v = 0$, o sea en los extremos, para $-x$ y $+x$.

$$a = -\frac{k}{m}x$$

$a_{\max.} = -\frac{k}{m}(\pm A)$., por lo que para una + A, obtendremos una aceleración negativa., y para una – A, obtendremos una aceleración positiva.

Movimiento Armónico Angular

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2.\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

donde I = momento de inercia.
κ = (capa) constante de torsión.

Péndulo Simple

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}., \Rightarrow f = \frac{1}{2.\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2.\pi.\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde L = longitud de la varilla.

Péndulo Físico

$$\omega = \sqrt{\frac{m.g.d}{I}}$$

$I =$ momento de inercia.

$d =$ distancia del centro de gravedad al eje de giro.

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{I}{m.g.d}}$$

Oscilaciones amortiguadas:

La disminución de la amplitud se debe a que la misma es causada por otra fuerza aplicada en sentido contrario al movimiento por lo que se llama fuerzas disipativas y se denomina amortiguación y de allí que el movimiento lleva el nombre de oscilación amortiguada.

$$\omega` = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4.m^2}}$$ Oscilador con poco amortiguación.

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4.m^2} = 0., \Rightarrow b = 2.\sqrt{k.m}$$ Amortiguación crítica.

La amortiguación critica es cuando el sistema deja de oscilar, *b* = constante que describe la intensidad de la fuerza amortiguada. Si *b* $> 2.\sqrt{K.m}$, se denomina sobre-amortiguación, el sistema tampoco oscila, pero vuelve al equilibrio mas lentamente que la amortiguación crítica. Si b $< 2.\sqrt{K.m}$, se denomina sub-amortiguación, o sea que el sistema oscila con una amplitud constante decreciente (Sears).

Oscilaciones forzadas, Resonancia.

$$A = \frac{F_{\max.}}{\sqrt{\left(k - m.\omega_d^2\right)^2 + b^2.\omega_d^2}}$$ amplitud de un oscilador impulsado.

$\omega_d =$ frecuencia angular impulsora.

La amplitud alcanza un máximo en una frecuencia impulsora cercana a la frecuencia de oscilación natural del sistema, este fenómeno se lo denomina **Resonancia** (Sears), o en otras palabras, cuando una fuerza impulsora suministra energía, y el amortiguamiento es pequeño, la amplitud crece rápidamente y la frecuencia adicional se acerca a la frecuencia natural hasta igualarla.

METODOLOGÍA PARA RESOLVER PROBLEMAS

En los problemas del MAS, es importante tener bien cuenta los datos aportados, ya que tanto la masa o la constante k se puede determinar a partir del sistema mismo, tener especial cuidado con la posición del cuerpo o partícula, pues de allí obtendremos las velocidades, amplitudes, aceleración, frecuencia, etc. Como por ejemplo si tenemos como dato que x_0 se encuentra en la posición para v = 0, entonces la amplitud A es igual a x_0. también es importante el uso de la conservación de la Energía, sobre todo cuando averiguar x, v, pero como estas están al cuadrado su posición se debe inferir a partir del punto de equilibrio.

PROBLEMAS

PB.11. 01.- **Sears.**

Un oscilador armónico tiene una masa de 0,2 kg., y un resorte ideal con k = 140 N/m. Calcule: a) El periodo; b) frecuencia; c) frecuencia angular.

Solución:

a)

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}.,\Rightarrow T = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}2kg}{140\,{}^{N}\!/_{m}}} = 0{,}237s$$

como podemos observar es la simple aplicación de la fórmula del periodo.

b)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}237s} = 4{,}22Hz.$$

c)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{140\,{}^{N}\!/_{m}}{0{,}2kg}} = 26{,}5\,{}^{rad}\!/_{s}$$

o bien se puede emplear otra fórmula:

$$\omega = 2.\pi.f = 6{,}28x4{,}22 = 26{,}5\,{}^{rad}\!/_{s}$$

Pb.11. 02.- Sears.

Los amortiguadores de un coche de 1000 kg están totalmente gastados, cuando una persona de 980N se sube lentamente al coche en su centro de gravedad, el coche baja 2,8 cm, cuando el coche golpea en un bache, comienza a oscilar verticalmente en un MAS. Modele el coche y la persona como un solo cuerpo en un solo resorte y calcule el periodo y la frecuencia de oscilación.

Solución:

A los fines de aplicar directamente las fórmulas para resolver el problema no contamos del dato de la constante k, por lo que tenemos que averiguar a partir de los datos que nos brinda el problema:

$$k = -\frac{F}{x} = \frac{980N}{0{,}0028m} = -3{,}5.10^5\ {}^{N}\!/_{m}$$

aquí tomamos que a la fuerza aportada por el peso de la persona hace que el coche baje un x.

Ahora para introducir la masa total en las fórmulas tenemos que sacar la masa de la persona y sumar a la masa del coche.

$$m_p = \frac{peso}{gravedad} = \frac{980N}{9{,}8\ {}^{m}\!/_{s^2}} = 100kg;$$

$$m_T = m_p + m_c = (1000 + 100)kg = 1100kg.$$

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}} = 6{,}28.\sqrt{\frac{1100kg}{3{,}5.10^5\ {}^{N}\!/_{m}}} = 0{,}352s$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}32s} = 2{,}84Hz.$$

Pb.11. 03.- Sears.
Un bloque esta en MAS con amplitud de 0,100 m sobre una superficie horizontal sin fricción. En un punto a 0,060 m del equilibrio, la rapidez del bloque es de 0,360 m/s.
a)¿Cuánto vale el periodo?.
b)¿Cuánto vale el desplazamiento, cuando la rapidez es de 0,120 m/s?.

Solución:

$T = \frac{2.\pi}{\omega}$, emplearemos esta fórmula, pues no tenemos la constante k, ni la masa.

Los datos son:

$x_0 = 0{,}060m$

$A = 0{,}100m$ usamos $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}}$,

$v_{x_0} = 0{,}360\ {}^{m}\!/_{s}$

$$A^2 - x_0^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}.,\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{v_0^2}{A^2 - x_0^2}} = \sqrt{\frac{\left(0,360\, m/s\right)^2}{(0,1m)^2 - (0,060m)^2}} = 4,5\, rad/s$$

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} = 1,40s.$$

b) Nuevamente utilizamos la fórmula del punto anterior, solo que buscamos x_0 para una velocidad dada.

$$x_0 = \sqrt{A^2 - \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0,095m$$

Pb.11. 04.- Sears.
Un peso de 160 kg suspendido de un cable cuya longitud natural es 3 m, lo alarga 3 cm. La sección recta del cable, la cual puede suponerse constante, es de 10 mm^2.

a) Si se desplaza la carga hacia abajo una pequeña longitud y se abandona a sí mismo, calcúlese la frecuencia de su vibración.
b) Hállese el módulo de Young del cable.

Solución:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2.\pi.f$$

Como tenemos que: $f = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{k}{m}}$ como podemos observar no contamos con la constante k, por lo que debemos obtenerla a partir de los datos del problema:

Datos: $peso = Fuerza = 160Kgf = 160kgf.9,8m/s^2 = 1568N.$

$l_0 = 3m.$

$x_0 = 3cm.$

$\sec ción = S = 10mm^2$

$F = k.x_0.,\Rightarrow k = \frac{F}{x_0} = 52266\, N/m$ reemplazando los valores tenemos:

$f = 2,87\, vib./s$

c) El módulo de elasticidad o módulo de Young vale:

$$E = \frac{F.l_0}{S.x_0} = 1{,}568.10^{10}\ N/m^2$$

Pb.11. 05.- Sears.
Un cuerpo esta vibrando con movimiento armónico simple de amplitud 15 cm y frecuencia 4 vibr/s. Calcúlese: a) los valores máximos de la aceleración y de la velocidad.
b) la aceleración y la velocidad cuando la elongación es de 9 cm.
c) el tiempo necesario para desplazarse desde la posición de equilibrio a un punto situado a 12 cm de la misma.

Solución:

$$a_{\max} = \pm\omega^2.A = 9465{,}2\ cm/s^2$$

$$v_{\max} = \omega.A = 377\ cm/s$$

b) $v = \omega.\sqrt{A^2 - x^2} = 25{,}2\ vibr/s.\sqrt{(15)^2 - (9)^2} = 302{,}4\ cm/s$

$$a = \omega^2.x = 5715{,}36\ cm/s^2$$

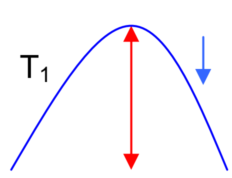
c) $v_f = 0 = v_0 - a.t., \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$, pero como la aceleración no es constante y esta en función del espacio recorrido tenemos:

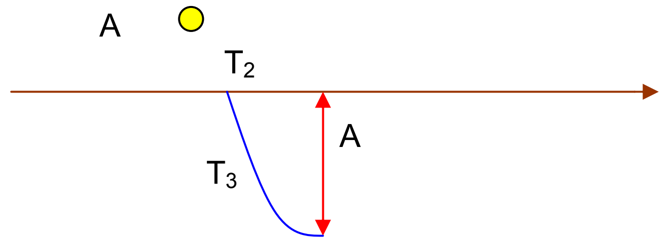
$v_f{}^2 = 0 = v_0{}^2 - 2.a.x., \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2.x}$, reemplazando en la primera ecuación:

$t = \frac{v_0}{\frac{v_0^2}{2.x}} = \frac{2.x}{v_0} = \frac{2.12cm}{377\ cm/s} = 0{,}06s$, se toma el valor de la velocidad máxima, ya que la distancia es a partir de la posición de equilibrio, donde $v = v_0 = v_{\max}$.

Pb.11. 06.- Sears.
En un puerto, las olas hacen que la superficie del mar se eleve y descienda en un MAS, con un periodo de 12,5 horas. ¿cuánto tarda el agua en descender de su altura máxima a la mitad de ella sobre su nivel promedio.

Solución:
Cuando nos dice el problema "su nivel promedio" nos esta indicando el punto de equilibrio, y el periodo nos dice que se eleve y desciende, y no que regresa a su nivel original.





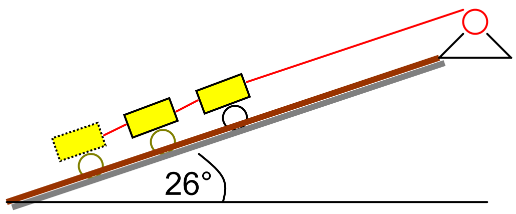
$T_T = T_1 + T_2 + T_3$ y como el tiempo solicitado es a la mitad de T_2, tenemos que:

$T_T/6$ = 12,5hs/6 = 2,08 hs.

Pb.11. 07.- Resnick.

Se mantiene en reposo a tres vagones de minas con un peso de 10.000kg, en una pendiente de 26°, sobre un riel, usando un cable paralelo a la pendiente. Se observa que el cable se estira 14,2 cm debajo de unos frenos acoplados, separando uno de los vagones, determine: a) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de los dos vagones restantes.

b) la amplitud de las oscilaciones.



Solución:

A los fines de poder emplear las fórmulas ya conocidas tenemos que encontrar la constante del cable.

$$k = \frac{F.sen.26^\circ}{x} = \frac{1000.kgf.9{,}8\,{}^{m}\!/_{s^2}}{14{,}2cm} = 3025{,}3\,{}^{N}\!/_{cm}$$

Se retira 1 de los vagones, y suponiendo que los tres vagones tienen pesos iguales, tenemos que:

F_2 = 65333 N, y cuya masa es m_2 = 6666,7 kg.

$$f = \frac{1}{2.\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1{,}07H_z$$

Δl = 14,2 cm, y para cada masa pertenecería un *Δl/3 = 4,73 cm*, y como quedan 2 masas, o sea que la amplitud tendría que ser *A = 4,73 cm*, de la masa faltante.

Veamos como lo podemos comprobar.

$E_p = \frac{1}{2}.k.x_1^2 = E_T = \frac{1}{2}.k.A^2$., por lo tanto $x = A$.

O sea que la energía potencial en un extremo es igual a la energía total, otra manera de manera de comprobar es la siguiente:

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$ pero en este punto $v_0 = 0$, y entonces $A = \sqrt{x_0^2}$., y $x_0 = 4{,}73cm$, por lo tanto tenemos que $A = x_0 = 4{,}73cm.$

Pb.11. 08.- Sears.

El tiranosaurio Rex, un dinosaurio bípedo que vivió hace 65 millones de años al final del periodo cretácico, tenia una longitud de pierna *L = 3,1 m*, y una longitud de zancada (distancia de una huella a la otra del mismo pie) es de *s = 4,0 m*. Estime la rapidez con que caminaba el tiranosaurio.
(este problema corresponde a la segunda parte del propuesto y desarrollado por Sears, en el libro **Física Universitaria, tomo I**).

Solución:

Se supone que el paso natural es igual al periodo de la pierna vista como una varilla uniforme con un pivote en la cadera, para un centro de masa *L/4,* y un momento de inercia *I = ML²/15,* entonces tenemos:

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{I}{m.g.d}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{M.L^2}{15.M.g.\frac{L}{4}}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{4.L}{15.g}} = 1{,}82s$$

$$v = \frac{s}{T} = \frac{4{,}0m}{1{,}82s} = 2{,}19\, m/s = 7{,}9\, km/h$$

con estas aproximaciones tenemos que el paso normal del tiranosaurio seria algo así como 1 paso y medio la del andar medio del hombre.

Pb.11. 09.

Un estudiante coloca una muestra de roca basáltica que pesa 5,4 kg en un extremo de un resorte estirándolo 20 cm., desde su posición normal y en su lugar coloca una muestra de suelo de un 1kg de peso. Hallar el periodo de oscilación del resorte.

Solución:

En primer lugar calculo la constante *k*, usando el peso de la muestra de la roca basáltica, ya que con ese peso obtengo el estiramiento, luego ese peso o fuerza que se encuentra en el sistema técnico lo paso a N, obteniendo de esta manera la constante *k* en N/m., y como ya hemos visto que el kgf es equivalente al kg (masa), en el SI.

$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}$., para obtener la constante $k = \frac{F}{x_0} = \frac{5,4kgf.9,8}{0,20m} = 264,6 \, {}^{N}\!/\!_{m}$

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{1}{264,6 \, {}^{N}\!/\!_{m}}} = 0,39s$$

Pb.11.10.- Sears.

Una masa de 0,400 kg se mueve en el extremo de un resorte con *k =300N/m*, sometido a la sección de una fuerza amortiguadora de $F_x = -b.x.$

a) si b = 9,00 kg/s, ¿qué frecuencia de oscilación tiene la masa?.
b) ¿Con qué valor de b la amortiguación será crítica?.

Solución:

a) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = 25 \, {}^{rad}\!/\!_{s}$

b) $b = 2\sqrt{k.m} = 21,9 \, {}^{kg}\!/\!_{s}$

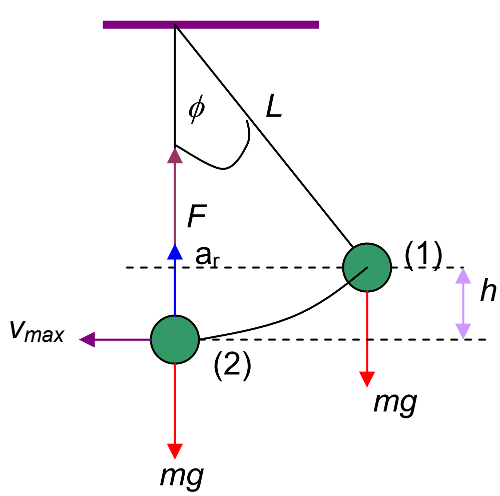
Pb.11. 14. Bueche.

Un péndulo de 24,85 cm de longitud es llevado lateralmente a cierto ángulo y se libera. Cuando la bola pasa por el punto central, la tensión en la cuerda es de un 6,8% mayor que el peso de la bola.

a)¿Cuál era el ángulo original del desplazamiento, cuando el péndulo fue liberado?.

c) ¿Cuánto vale el periodo?.
d) ¿Cuánto vale la velocidad en el punto de equilibrio?.

Solución:

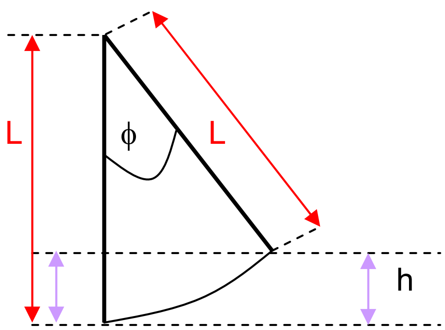


a) En el punto (2), según la 2da. Ley de Newton, tenemos que: $\Sigma F = m.a$
$\Sigma F = F - m.g = m.v^2/L$ (aquí reemplazamos R por L)

$F = m.g + m.v^2/L$

O sea que las fuerzas actuantes son la tensión de la cuerda que la representamos por F y su peso, y como se trata de un movimiento circular a la aceleración radial la reemplazamos por su relación con la velocidad lineal y el radio.

Ahora como en el movimiento inicial tenemos una altura ganada por la bola en el punto (1), entonces por la conservación de la Energía Mecánica, tenemos que la Energía Potencial en el punto (1) es igual a la Energía Cinética en el punto (2), ahora bien como obtenemos el valor de h, recurrimos a la trigonometría:



$$\cos\phi = \frac{L-h}{L}$$

$$h = L - \cos\phi.L = L(1-\cos\phi)$$

ahora regresemos a la lectura del problema y este nos dice que:

$$F = T = m.g + 0{,}068m.g$$

$$F = T = m.g. + m.\frac{v^2}{L}$$ igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$m.g + 0{,}068m.g = m.g + m.\frac{v^2}{L}$$

$$v = \sqrt{L.g.0{,}068} = 0{,}4\,{}^{m}\!/_{s}$$

ahora mostramos otra manera de obtener h, igualando las Energías de los puntos (1) y (2).

$$m.g.h = \frac{1}{2}m.v^2., \Rightarrow h = \frac{v^2}{2.g} = 8{,}6.10^{-3}\,m$$

$$\cos\phi = \frac{0,2485 - 0,0086}{0,2485} = 0,965., \Rightarrow arc.\cos\phi \cong 15^{\circ}$$

b) como ϕ = 15°, el error es < 1%, entonces el péndulo es simple.

c) $T = 2.\pi.\sqrt{\frac{L}{g}} = 1,0s$

d) $v_1 = 0,4\, {}^{m}\!/_{s}$

otra forma de resolver es la siguiente:

$$m.g.L(1-\cos\phi) = \frac{1}{2}m.v^2$$
$$v^2 = 2.g.L(1-\cos\phi).g$$

regresemos a la fórmula primeramente obtenida:

$$F = m.g + m.\frac{v^2}{L} = m.g + \frac{m}{L}.2.g.L(1-\cos\phi).g$$

$$\left.\begin{aligned} F &= m.g[1+2(1-\cos\phi)] \\ F &= 1,068m.g \end{aligned}\right. \quad \text{igualando estas dos ecuaciones}$$

$$1,068.m.g = m.g.[1+2(1-\cos\phi)]$$
$$0,068 = 2(1-\cos\phi)$$
$$1-\cos\phi = \frac{0,068}{2}$$

$$\cos\phi = 1 - \frac{0,068}{2} = 0,966$$
$$arc.\cos\phi = 14^{\circ}59^{''}$$

TEMA 12
ONDAS MECANICAS

<u>Introducción:</u> En este caso solo abordaremos las ondas mecánicas, o sea aquellas que viajan a través de un medio, este tema para geología es de suma importancia ya que su aplicación es muy usada en la exploración de hidrocarburos, en mecánica de suelos y mecánica de rocas, en lo que hace fundamentalmente para determinar estructuras en profundidad, en taludes de camino de montaña, donde los costos de el arranque por medio mecánico a explosivo se multiplica por 10, en algunos casos aplicable también a aguas subterráneas y minería.

Las ondas al viajar por un medio una cuerda o un material natural (suelo, agua, rocas), las partículas componentes de ese medio sufren desplazamientos, por lo que las ondas generan una perturbación del equilibrio. Las ondas pueden ser ***transversales, longitudinales*** o una combinación de ambas, y cada material posee propiedades elásticas particulares, de allí que también podemos diferenciarlos por medio del calculo de la velocidad de la onda que lo atraviesa.

Onda periódica: cuando el movimiento es repetitivo o periódico y hacen en un movimiento armónico simple (MAS).

La onda avanza con una rapidez constante y es propio de cada medio.

$$\boxed{v = \lambda . f}$$

$v =$ velocidad de la onda.
$\lambda =$ longitud de onda
$f =$ frecuencia.

Esta ecuación se cumple tanto para todos los tipos de ondas periódicas (tanto para ondas transversales como las longitudinales).

$y(x,t) = A.sen(t - \frac{x}{v} = A.sen^2 .\pi .f(t - \frac{x}{v})$ ecuación de una onda senoidal que avanza en la dirección + x.

$$T = \frac{1}{f} \qquad \boxed{\lambda = \frac{v}{f}}$$

llamamos *k* al n° de ondas.

$$k = \frac{2.\pi}{\lambda} .,\Rightarrow \lambda = \frac{2.\pi}{k} .,\Rightarrow f = \frac{\omega}{2.\pi}$$

$\omega = v.k$ (onda periódica)

$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ velocidad de onda transversal en un hilo, donde:

$\mu =$ masa por unidad de longitud = $\frac{m}{L}$

$F =$ Tensión.

Velocidad de una onda longitudinal

La diferencia con una onda transversal es que el desplazamiento ***y*** tiene la misma dirección que la onda, mientras que en una onda transversal este desplazamiento lo es perpendicular.

$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$., la velocidad de una onda longitudinal es idéntica que para una onda transversal.

Si se trata que el medio es un fluido, la velocidad longitudinal es:

$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$, donde $\beta =$ módulo de volumen

$\rho =$ densidad del fluido.

β = indica el *cambio de presión* dividido en el *cambio fraccionario e volumen*.

$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, esto es la rapidez de una onda longitudinal en una varilla sólida, donde:

$Y =$ módulo de Young.

Solo aplicable solamente a una varilla o barra cuyo laterales están libres.

Ondas sonoras en gases

$v = \sqrt{\frac{\gamma . p}{\rho}}$, $\rho =$ densidad = $\frac{p.M}{R.T}$., por lo que *M*= masa molecular

R= constante de los gases.
T= temperatura absoluta.

$\gamma =$ constante que depende del tipo de gas.
$p =$ presión.

$v = \sqrt{\frac{\gamma .R.T}{M}}$ = rapidez del sonido en un gas ideal.

Potencia e Intensidad de las ondas sonoras.
Cuando una onda se está propagando, cada elemento que es perturbado ejerce una fuerza sobre el que se encuentra delante de él.
La potencia máxima instantánea en un hilo está dado por:

$P_{max.} = \sqrt{\mu .F} .\omega^2 .A^2$., y para una potencia media: $P_{med.} = \frac{1}{2} .\sqrt{\mu .F} .\omega^2 .A^2$.

La potencia media por unidad de área transversal en el movimiento ondulatorio se lo expresa como intensidad:

$I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho .\beta} .\omega^2 .A^2$., para un fluido.

Para una varilla es: $I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho .Y} .\omega^2 .A^2$.

También: $I = \frac{P_{max.}^2}{2.\rho .v.} = \frac{P_{max}^2}{2.\sqrt{\rho .\beta}} = W/_{m^2}$. la unidad de medida de la intensidad es de Watt sobre metro cuadrado.

Ondas sonoras senoidales con la misma intensidad pero diferente frecuencia tienen diferente amplitud de desplazamiento *A*, pero la misma amplitud de presión P_{max}

El intervalo normal de la audición humana se encuentra entre los 20 y 20000H_z de frecuencia.

La potencia sonora total media emitida por una persona que habla con voz normal es del orden de 10^{-5} *W*, en tanto que un grito corresponde cerca de 3.10^{2} W (Sears).
Variación de la intensidad con la distancia:

$I_1 = \frac{P}{4.\pi.r_1^2}$., donde *r* = distancia de la fuente, y *P* = potencia.

Si la potencia *P* es la misma, para dos intensidades y distancias distintas, tenemos:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Nivel de intensidad, también denominado nivel de sonido:

$B = (10dB)\log\frac{I}{I_0}$., de donde tenemos que $I_0 = 10^{-12}\frac{W}{m^2}$, el umbral del oído humano a 1000*Hz*.
dB = decibeles.

1 decibel = 1/10 bel.
Para una onda sonora de intensidad igual a I_0 su nivel de intensidad de sonido es de 0 dB.
El umbral del dolor, su intensidad es 1 *W/m²*, y su nivel de sonido es 120 *dB*.

Ondas estacionarias
Ondas estacionarias = un patrón de nodos y antinodos.
Nodos = donde el desplazamiento es cero en todo momento.
Antinodos = desplazamiento de máxima amplitud.

En una onda viajera cada partícula de la cuerda vibra con la misma amplitud, en una onda estacionaria, la amplitud no es igual en las partículas, sino que varia con la ubicación de las partículas (Resnick).

Resonancia

$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2.L}$ $\quad (n = 1,2,3.....)$ son los puntos antinodos.

frecuencias permitidas de las ondas estacionarias de la cuerda.

$v =$ velocidad., $\lambda_n =$ longitud de onda. L = longitud de una cuerda fija.

$$\lambda_n = \frac{2.L}{n}$$

si no hubiere amortiguamiento, la frecuencia resonante sería una frecuencia natural y la amplitud crecería sin límite con el tiempo, el límite elástico sería rebasado y la cuerda se rompería.

Efecto Doppler.
Observador en reposo y la fuente en reposo:

$f' = f\dfrac{v \pm v_0}{v} = f(1+\dfrac{v_0}{v})$., $f'=$ frecuencia que llega al observador

$f =$ frecuencia de la fuente.

$(1+\dfrac{v_0}{v}) =$ incremento por el movimiento del observador.

$v_0 =$ velocidad del observador
$v =$ velocidad de la onda.
El signo +, cuando el observador se acerca a la fuente.
El signo -, cuando el observador se aleja de la fuente.

Observador en reposo y movimiento de la fuente:

$f' = f\dfrac{v}{v \pm v_s}$ **,** en este caso el signo es + , cuando la fuente se aleja.
, y se usa el signo - , cuando la fuente se acerca al observador.

Fuente y observador se mueven:

$f' = f.\dfrac{v \pm v_y}{v \pm v_s}$ **,** donde $v_s =$ velocidad de la fuente.

Para cuando el observador y la fuente se acercan, se usa en el numerador el signo +, y en el denominador el signo -.

Para cuando el observador y la fuente se alejan, se usa el signo -, en el numerador, y el signo + ,en el denominador.

<u>Metodología para resolver problemas</u>:
En este tema de onda, es relativamente sencillo, desarrollar los problemas, ya que se trata casi siempre de aplicaciones directas de las fórmulas, para las determinaciones de rapidez, longitud de onda, frecuencia, etc., en los casos de ondas estacionarias hay que tener en cuenta que la distancia entre nodos y antinodos es $\lambda/2$., y entre un nodo y antinodo adyacente es $\lambda/4$., para esto es conveniente realizar un dibujo o diagrama para situarnos en el problema., y cuando se trate de sonido, es muy conveniente fijar bien los conceptos de amplitud, y los de intensidad, recordar que el sonido es muy dependiente del medio, ya sea a través de su módulo adiabático y de la densidad, hay una gran diferencia entre la velocidad del sonido en el aire y la que hay en el agua, hay que establecer un sistema de coordenadas a los fines de definir la dirección positiva de

la que va del oyente a la fuente y viceversa (efecto Doppler). si se trata de ondas reflejadas es conveniente realizar el análisis en dos etapas.

Problemas:

Pb.12. 01.- Sears.

Siempre que la amplitud sea suficientemente grande, el oído humano puede percibir ondas sonoras dentro de un intervalo de frecuencia comprendidas aproximadamente, entre 20 y 20.000 (ciclos/s). Calcúlense las longitudes de ondas correspondientes a estas frecuencias: a) para ondas sonoras en el aire (velocidad = 346 m/s) y b) para ondas sonoras en el agua (velocidad en el agua = 1450 m/s).

Solución:

$v = \lambda..f.,\Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}.,$ como tenemos dos medios distintos, y por lo tanto dos velocidades, pasaremos primeramente a analizar lo que pasa con el aire:

Para el aire:

$$\lambda_{MAX} = \frac{v_{AIRE}}{f_{MIN.}} = \frac{346\left(m/s\right)}{20\left(1/s\right)} = 17{,}3m.$$

$$\lambda_{MIN.} = \frac{v_{AIRE}}{f_{MAX.}} = \frac{346\left(m/s\right)}{20.10^{3}\left(1/s\right)} = 17{,}3.10^{-3}\,m = 1{,}73cm.$$

Para el agua:

$$\lambda_{MAX.} = \frac{v_{AGUA}}{f_{MIN:}} = \frac{1450\left(m/s\right)}{20\left(1/s\right)} = 72{,}5m.$$

$$\lambda_{MIN.} = \frac{v_{AGUA}}{f_{MAX.}} = \frac{1450\left(m/s\right)}{20.10^{3}\left(1/s\right)} = 72{,}5mm = 7{,}25cm.$$

Pb.12. 02.- Sears.

Las ondas de compresión en el agua a 20°C se propagan con una velocidad de 1450 m/s. Calcúlese la compresibilidad adiabática del agua y compárese con la isoterma que vale 20.833 (kgf/cm^2).

Solución:

La velocidad de propagación de la onda es: $v = \sqrt{\dfrac{B_{AD.}}{\rho}}$., donde B_{AD} es el módulo de compresión adiabático.

Entonces tenemos:

$$B_{AD.} = v^2.\rho = 1450\, {}^{m^2}\!/_{s^2}.1\, {}^{g}\!/_{cm^3} = 21.440\left({}^{kg}\!/_{cm^2}\right)$$

la densidad del agua $\rho = 1\, {}^{g}\!/_{cm^3}$.

ahora comparamos los dos módulos:

$\dfrac{B_{AD.}}{B_{ISOT.}} = \dfrac{21.440}{20.833} = 1{,}03$; el módulo adiabático es mayor que el isotérmico en un 3%.

Pb.12. 03.- Sears.
Los tubos mas largos de un órgano miden 4,8 m, de longitud. ¿cuál es la frecuencia fundamental de la nota emitida por ellos., a) si son abiertos, b) si son cerrados?.

Solución:
En el caso de tubos abiertos tenemos que $\lambda = 2.L$
$L = 4{,}8m.$
$f = \dfrac{v}{\lambda}$. Para el caso de tuvo abierto, la frecuencia será:

$$f_1 = \frac{v}{2.L} = \frac{344\, {}^{m}\!/_{s}}{2.4{,}8m} = 35{,}83\, {}^{vib.}\!/_{s}$$

En el caso de tubos cerrados tenemos que $\lambda = 4.L$

$$f_2 = \frac{v}{4.L} = \frac{344\, {}^{m}\!/_{s}}{4.4{,}8(m)} = 17{,}92\, {}^{vib.}\!/_{s}$$

Pb.12. 04.- Sears (modificado).
Los terremotos producen ondas sísmicas longitudinales (ondas P), y transversales (ondas S), a una profundidad de 1000 Km. bajo la superficie terrestre, las ondas S viajan cerca de 6400 m/s., a) ¿qué longitud de onda tiene una onda S, cuyo periodo de oscilación es de 2,0 s.?.

Solución:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \lambda = \frac{v}{f} \qquad \lambda = v.T = 6400\,{}^{m}\!/_{s}\,.2s = 12800m = 12{,}8km.$$

Pb. 12. 05. Resnick.
Una cuerda en ambos extremos mide 8,36 m de largo y tiene una masa de 122 g. Esta sujeta a una tensión de 96,7 N, y se hace vibrar., a)¿qué rapidez tienen las ondas en la cuerda?.
b)¿cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria mas larga posible?.
c) Indique la frecuencia de esa onda.

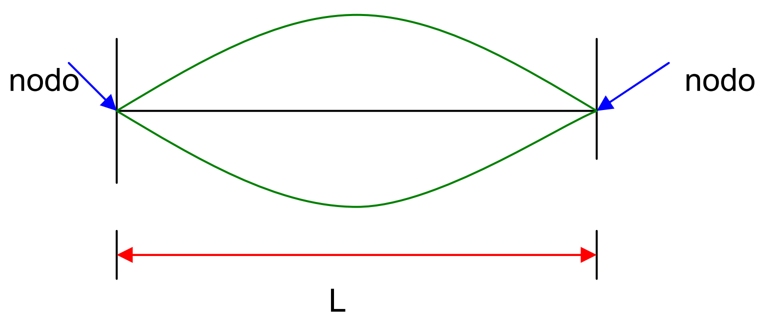
Solución:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}122kg}{8{,}36m} = 0{,}0146\,{}^{kg}\!/_{m}$$

a) $$v = \sqrt{\frac{96{,}7N}{0{,}0146\,{}^{kg}\!/_{m}}} = 81{,}4\,{}^{m}\!/_{s}$$

b)



La fig. nos representa una onda estacionaria mas larga posible, los nodos son sus extremos fijos.

$$\lambda = 2.L = 2.8{,}36m = 16{,}72m$$

c)

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{81{,}4\,{}^{m}\!/_{s}}{16{,}72m} = 4{,}87Hz.$$

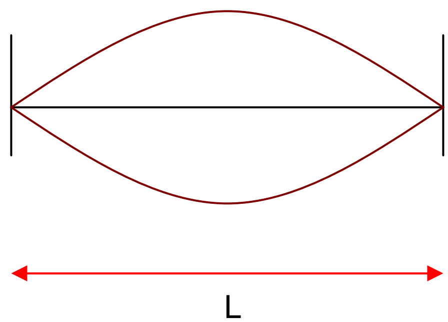
Pb. 12. 06.- Resnick.
¿Cuáles son las tres frecuencias más bajas de las ondas estacionarias en un alambre de 9,88 m de largo que tiene una masa de 0,107 g, y que estiramos con una tensión de 236 N?.

Solución:
Primeramente encontremos la velocidad de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad \text{donde } \mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}107kg}{9{,}88m} = 0{,}011 \, {}^{kg}\!/_{m}$$

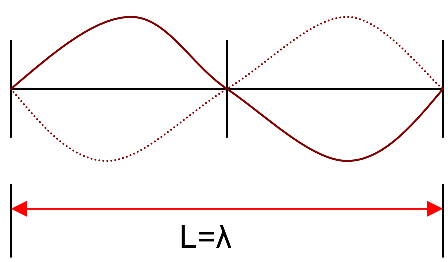
$$v = \sqrt{\frac{236N}{0{,}0108 \, {}^{kg}\!/_{m}}} = 147{,}82 \, {}^{m}\!/_{s}$$

ahora bien busquemos la frecuencia mas baja, o sea para que sea la frecuencia mas baja la longitud de onda tiene que ser la máxima:



$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2.L} = 7{,}48Hz.$$

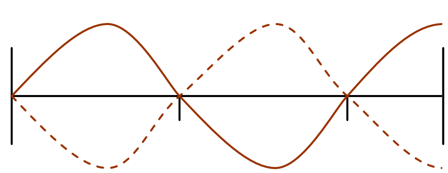
La segunda es cuando la longitud de la cuerda es igual a la longitud de la onda:

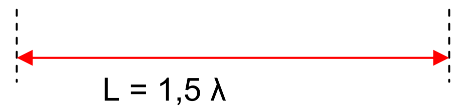


Entonces tenemos que: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L} = 14{,}9Hz.$

,y para la 3era., frecuencia es cuando en la longitud de la cuerda se encuentra una longitud y media de onda:

$$f = \frac{v}{1{,}5.L} = 22{,}4Hz.$$





Pb. 12. 07.- Sears.
La boca de un bebe esta a 30 cm de la oreja de su padre y a 3 m de la su madre. ¿Qué diferencia hay entre los niveles de intensidad de sonido que escuchan ambos padres?.

Solución:

$$B_2 - B_1 = 10dB\left(\log\frac{I_2}{I_0} - \log\frac{I_1}{I_0}\right) = 10dB\left[\left(\log I_2 - \log I_0\right) - \left(\log I_1 - \log I_0\right)\right]$$

$$= 10dB.\log\frac{I_2}{I_1} = 10dB.\log\frac{r_1^2}{r_2^2} = 10dB(-2)$$

$$B_2 - B_1 = -20dB.$$

o sea que la diferencia de intensidad que escucha la madre es de –20 decibeles.

Pb. 12. 08.- Sears.
El sonido de una trompeta ($f = 440Hz$) radia uniformemente en todas direcciones en el aire a 20°C. A una distancia de 5 m de la trompeta el nivel de intensidad de sonido $B = 55{,}0dB.$

a) Determine la amplitud de presión a esta distancia.
b) Calcule la amplitud de desplazamiento.
c) ¿A que distancia $B = 30dB.$?

Solución:

a) $P_{MAX.} = \sqrt{I.2.\rho.v}$ pero no conocemos la intensidad para poder emplear la fórmula:

$$55dB = 10dB.\log\frac{I}{I_0}$$

$$\frac{55dB}{10dB} = \log\frac{I}{I_0} = 5{,}5$$ resolviendo esta última igualdad, tenemos que:

$$10^{5{,}5} = \frac{I}{I_0}$$ por lo que $I = I_0.10^{5{,}5}$, pero como $I_0 = 10^{-12}$, nos queda:

$I = 10^{-12}.10^{5,5} = 10^{-6,5}$, ahora con este valor, paso a determinar la amplitud de presión máxima:

$$P_{MAX.} = \sqrt{\frac{1}{10^{6,5}}.2.1,2.344} = 1,62.10^{-2}\,Pa.$$

realicemos el análisis dimensional:

1W = joule/s = N.m/s^2 = kg.m/s^2 x m/s.   ahora bien vamos a la raíz:

$$\sqrt{\frac{W}{m^2}.\frac{kg}{m^3}.\frac{m}{s}} = \sqrt{\frac{kg.m}{s^2}.\frac{kg.m}{s^2}.\frac{1}{m^4}} = \frac{N}{m^2} = 1Pa.$$

c) Amplitud de desplazamiento, partimos de la fórmula siguiente:

$P_{MAX.} = \beta.k.A.$

$A = \frac{P_{MAX.}}{\beta.k}$ pero como obtenemos k:

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2.\pi.f.}{v} = \frac{2x3,14x440Hz}{344\,{}^{m}\!/\!{}_{s}} = 8\,{}^{rad}\!/\!{}_{m}$., y ahora tenemos que averiguar el módulo de volumen adiabático:

$\beta = \delta.pa = 1,4x1,013.10^5\,Pa = 1,42.10^5\,Pa.$ donde $\delta =$ densidad del aire
$pa =$ presión atmosférica.

Ahora regresemos a la fórmula de A:

$$A = \frac{1,62.10^{-2}}{1,42.10^5.8} = 5.10^{-9}\,m.$$

c) A que distancia $B = 30dB.$

$$30dB = 10dB.\log\frac{I_2}{I_0}$$

$$\frac{30dB}{10dB} = \log\frac{I_2}{I_0} = 3$$

$$10^3 = \frac{I_2}{I_0}.,\Rightarrow I_2 = 10^3.I_0 = 10^3.10^{-12}\frac{W}{m^2} = 10^{-9}\,{}^{W}\!/\!{}_{m^2}$$

$I_2 = 10^{-9}\,{}^{W}\!/\!{}_{m^2}$ para 30 dB., empleando la relación de intensidades y el radio de acción:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} .,\Rightarrow r_2^2 = \frac{I_1}{I_2}.r_1^2$$ reemplazando los valores correspondientes $r_2 = 88,9m.$

Pb. 12. 09.- Sears.

Sonar náutico, la fuente de sonido del sistema de sonar de un barco opera a 25,0kHz, la rapidez del sonido en el agua es de 1480 m/s.

a) Calcule la longitud de onda de las ondas emitidas por la fuente.
b) Calcule la diferencia de frecuencia entre las ondas radiadas directamente y las reflejadas en una ballena que viaja directamente hacia el barco a 5,85 m/s. El barco se encuentra en reposo en el agua.

Solución:

a)

$$\lambda = \frac{v_{AGUA}}{f_S} = \frac{1480 \, m/s}{25000Hz} = 0,0592m$$

la velocidad de la ballena es: $v_b = 5,85 \, m/s$

b)

$$f - f' = ?.$$

$$f' = f\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) = 25000\left(1 + \frac{5,85}{1480}\right) = 25098,31Hz.$$ es la frecuencia con la que escucharía la ballena., ahora bien la frecuencia reflejada en la ballena y que regresa al barco es:

$$f_B = f'.\frac{v}{v - v_S} = 25197,9 \cong 25198Hz.$$

$$f_B - f = 25198 - 25000 = 198Hz.$$

Pb. 12. 10.- Sears.

Un tren viaja a 35,0 m/s en el aire tranquilo, la frecuencia de la nota emitida por su silbato es de 300Hz. Diga que frecuencia oye un pasajero de un tren que se mueve en dirección opuesta a 15, m/s y :

a) Se acerca el primer tren.
b) Se aleja de él.

Solución:

$v_1 = 35 \, m/s$

$v_2 = -15 \, m/s$

a)

$f_S = 300 Hz.$

$$f' = f_S . \frac{v + v_2}{v - v_1} = \frac{340 + (-15)}{340 - 35} .300 = 349 Hz.$$

b)cuando ambos trenes se alejan:

$$f' = f_S \left(\frac{v - v_2}{v + v_1} \right) = 260 Hz.$$

TEMA 14

TEMPERATURA - CALOR

<u>Introducción</u>: "Cuando dos sistemas se hallan en equilibrio térmico, decimos que tienen la misma temperatura".

Ley Cero: "existe una magnitud escalar denominada temperatura, que es una propiedad de todos los sistemas termodinámicos en equilibrio, dos sistemas están en equilibrio sí y solo sí sus temperaturas son iguales".

Escalas de T°:

$T_C = T - 273{,}15$ (temperatura Celsius, es igual a la T° kelvin menos 273,15.)

$T_F = 9/5\ T_C + 32$ (la temperatura Fahrenheit es igual a nueve quinto de la temperatura Celsius más treinta y dos).

9 F° = 5 C°.

Expansión Térmica: Expansión lineal se denomina al cambio de cualquier dimensión lineal de un sólido, longitud, ancho o espesor. Sí **<u>L</u>** es la longitud de esta dimensión, el cambio de temperatura Δ**T** provocará un cambio en la longitud Δ**L.**

Δ**L** será proporcional a Δ**T.**

$\Delta L = \alpha . L . \Delta T$**.,** donde α = coeficiente de expansión lineal.
Este coeficiente tiene valores según el material.

Sólidos Isotrópicos = el cambio porcentual de longitud para una alteración de la temperatura es igual en todas las direcciones: $\Delta V = 3 . \alpha . V . \Delta T$.
Coeficiente de expansión volumétrica β de un fluido.

Δ**V =** β**. V.** Δ**T.**

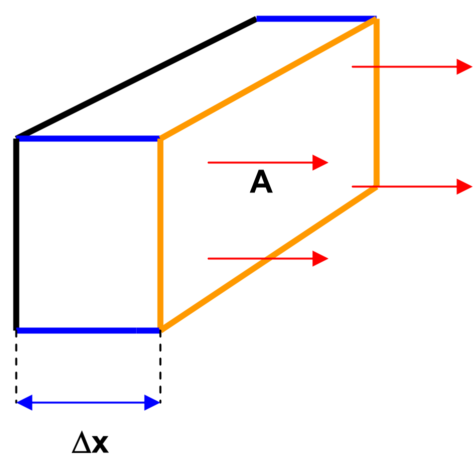
"En el nivel microscópico, la expansión térmica de un sólido indica un ***incremento en la separación promedio entre los átomos de un sólido***".

CALOR: El calor es la energía que fluye entre un sistema y su ambiente a causa de la diferencia de temperatura entre ellos.

Transferencia de calor: Se transfiere calor de un sistema y su ambiente cuando su Temperatura es diferente.

Mecanismos de transferencia: (1) ***Conducción***, (2) ***Convección*** y (3) ***Radiación.***
Conducción Térmica: los electrones atómicos pueden moverse libremente y trasmiten el incremento de E_K de las regiones de altas T° a bajas T°.

$H = k.A.\frac{\Delta T}{\Delta x}$ donde ***k*** = conductividad térmica y su unidad es Wat/m.k en **T°** kelvin.
Δ**x** = espesor.
A = área



Resistencia Térmica = R

$$\boxed{R = \frac{\Delta x}{k}}$$

donde $\Delta x =$ espesor del material por donde se trasmite el calor

cuando mas baja sea la conductividad (k) mas alto será R, por lo tanto será mas aislante.

R = se expresa en unidades inglesas $ft^2.F^0.{}^{h}\!/_{Btu.}$

Rapidez del flujo de calor H:

$$\boxed{H = k.A.\frac{T_H - T_x}{x}}$$

$$\boxed{H = -k.A.\frac{dT}{dx}}$$

$dT =$ gradiente de temperatura.

x = espesor del material en dirección de la transferencia de calor.

Como el flujo en dirección de temperatura decreciente, el gradiente ${}^{dT}\!/_{dx} =$ es negativo, se introduce el signo (–), para que H sea positivo.

Convección: este tipo de transferencia tiene lugar cuando un fluido, puede ser el aire o el agua, entra en contacto con un objeto cuya temperatura es mayor que la de su ambiente, se eleva la temperatura del líquido en contacto con el objeto caliente y (en la generalidad de los casos) se expande el líquido.

El fluido caliente es menos denso que el fluido mas frió circundante, por lo cual se eleva a causa de las fuerzas de flotación.

El fluido mas frió del ambiente cae y toma lugar del fluido mas caliente que se eleva iniciándose así una circulación convectiva.

Ejemplos: la convención atmosférica contribuye mucho a determinar los patrones climatológicos y las variaciones metereológicas diarias.

Las celdas convectivas dentro del manto terrestre, sus superficies más externas son las placas tectónicas cuyos movimientos desplazan a los continentes.

Radiación: la energía proveniente del sol llega a nosotros debido a las ondas electromagnéticas que se desplazan libremente por el vació del espacio intermedio.

Cuando mas alta sea la temperatura de un objeto, más irradiará. La energía irradiada es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura.

La temperatura de la Tierra se estabiliza en unos 300 k, porque a ella irradia energía hacia el espacio con la misma rapidez con que la recibe del Sol.

1era Ley de la Termodinámica: En un sistema termodinámico, donde la energía interna es el único tipo de ella que puede tener, la ley de la conservación de la energía puede expresarse así:

$$Q + W = \Delta E_{int.}$$

$Q =$ Energía transferida (como calor) entre el sistema y su ambiente, debido a una diferencia de temperatura entre ellos.

$W =$ Trabajo hecho en un sistema, o por él mediante fuerzas que actúan en su frontera.

$\Delta E_{int.} =$ Es el cambio de Energía interna, que ocurre cuando se transfiere energía hacia el sistema o se extrae de él en forma de calor o de trabajo.

Por convención se decidió que Q sea positivo cuando se transfiera calor hacia el interior del sistema y que W también lo sea, cuando se efectúa trabajo en él., con tales valores sirven para incrementar la energía interna del sistema.

"en todo proceso termodinámico entre los estados de equilibrio **i** y **f** (inicial y final), la magnitud $Q + W$, tiene el mismo valor para cualquier trayectoria entre **i** y **f**. Esta cantidad es igual al cambio de valor de una función de estado llamada Energía interna $E_{int.}$

Capacidad calorífica y Calor específico.
La capacidad calorífica C de un cuerpo se define como la razón de la cantidad de energía calorífica Q, transferido al cuerpo en un proceso cualesquiera a su cambio de temperatura correspondiente ΔT.

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m.\Delta T} =$ capacidad del calor específico o simplemente **calor específico**.

La capacidad calorífica caracteriza a un cuerpo en particular, en tanto que el calor específico caracteriza a una sustancia. Ambas propiedades dependen de la temperatura (y ≅ presión).

$$Q = m.c.(T_f - T_i)$$

Hay que agregar de manera que el calor Q, se agrega al material. Según las condiciones nos pueden llevar a distintos c. Según las condiciones pueden ser a volumen constante, Presión constante.

Calor de Transformación: Cuando entra calor en un sólido o en un líquido, la temperatura de la muestra no se eleva necesariamente. La muestra puede pasar de una fase o estado (Sólido o líquido o gaseoso) a otro. La cantidad de calor por unidad de masa que debe transferirse para producir un cambio de fase, recibe el nombre de calor de transformación o de calor latente (cuyo símbolo es ***L***) para el proceso.

$Q = L.m..$, donde $m =$ masa de la muestra que cambia la fase.

$L_f =$ calor de fusión.

$L_V =$ calor de vaporización.

Calor específico es $J/kg.K$, capacidad calorífica por unidad de masa.

Si multiplicamos el calor específico por la masa molar *M*, obtenemos el calor específico molar, cuya unidad es $J/mol.K.$ o también denominado capacidad calórica por mol.

Salvo algunos casos como el carbono, todos los sólidos tienen valores cercanos a 25 $J/mol.K$, al comparar los calores específicos molares, en realidad estamos comparando muestras que contienen la misma cantidad de moles y no las que poseen masas idénticas.

Trabajo realizado en o por un gas ideal:

$W = -\int p.dV.$

Trabajo hecho a **volumen constante:**

$W = 0$ (volumen constante) el trabajo es cero en cualquier proceso donde el volumen permanezca constante.

Trabajo hecho a **presión constante**:

$W = -p\int dV = -p(V_f - V_i)$ (como *p* es constante se saca fuera de la raiz).

Trabajo hecho a **temperatura constante:**

Un proceso efectuado a temperatura constante se denomina ***isotérmico.***

$p.V = cte.$

$W = -n.R.T.\ln\frac{V_f}{V_i}$ es negativo siempre que el volumen final sea mayor que el volumen inicial, y positivo siempre que el volumen final sea menor que el volumen inicial.

Trabajo hecho en **aislamiento térmico:**

Se da el nombre de proceso ***adiabático*** al que se lleva a cabo en aislamiento térmico.

$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_f.V_f - p_i.V_i)$ (adiabático).

$\gamma =$ razón de calores específicos.

Energía interna de un gas ideal:

$$\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2} n.R.\Delta T.$$

la Energía Cinética rotacional de una molécula diatómica:

$$K_{rotacional} = \frac{1}{2} I_x.\omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y.\omega_y^2.$$

$I =$ Inercia rotacional de la molécula cuando gira alrededor de un eje particular.

Teorema de equiparación de la energía:
"cuando un número de moléculas es grande, la energía promedio por molécula es $\frac{1}{2}k.T$, para cada grado independiente de libertad.

$$E_{\text{int.}} = N\left(\frac{3}{2} n.R.T\right) = \frac{3}{2} n.R.T. \text{ (gas monoatómico)}$$

$$E_{\text{int.}} = N\left(\frac{5}{2} k.T\right) = \frac{5}{2} n.R.T. \text{ (gas diatómico)}$$

$$E_{\text{int.}} = N\left(\frac{6}{2} k.T\right) = 3..R.T \quad \text{(gas poliatómico).}$$

"la energía interna de un gas ideal depende exclusivamente de su temperatura".

Calores específicos molares de los sólidos:

$$E_{\text{int}} = N(3.k.T) = 3n.N_A.k.T = 3n.R.T.$$

$$Q + W = \Delta E_{\text{int.}}.,\therefore \Rightarrow W = 0$$

$$Q = \Delta E_{\text{int.}} = 3.n.R.\Delta T$$

Entonces el calor específico molar es:

$$C = \frac{Q}{n.\Delta T} = \frac{3.n.R.\Delta T}{n.\Delta T} = 3R = (3)(8{,}31\, J/mol.K) \approx 25\, J/mol.K$$

solo aplicable para temperaturas suficientemente altas, para temperaturas bajas se trata con la física cuántica.

Calor específico molar a volumen constante:

$$C_V = \frac{Q}{n.\Delta T} = \frac{\Delta E_{int.}}{n.\Delta T}$$

$$C_V = \frac{3}{2}R = 12{,}5\, J/_{mol.K}$$ (gas monoatómico)

$$C_V = \frac{5}{2}R = 20{,}8\, J/_{mol.K}$$ (gas diatómico)

$$C_V = 3.R = 24{,}9\, J/_{mol.K}$$ (gas poliatómico)

Calor específico molar a presión constante:
Como ya dijimos que "la energía interna de un gas ideal depende exclusivamente de la temperatura".
El calor transferido en un proceso a presión constante puede escribirse:

$Q = n.C_p \Delta T.$, donde $C_p =$ calor específico molar a presión constante.

$W = -p.\Delta V = -n.R.\Delta T.$
para conseguir el cambio de energía interna en un trayecto determinado en lugar de:

$$Q = n.C_p.\Delta T.,\therefore \Rightarrow n.C_V.\Delta T = n.C_P.\Delta T$$

o bien:

$$C_p = C_V + R.$$

calores específicos molares con una presión constante:

$$C_p = \frac{5}{2}R = 20.8\, J/_{mol.K}$$., (gas monoatómico)

$$C_P = \frac{7}{2}R = 29.1\, J/_{mol.K}$$., (gas diatómico)

$$C_p = 4R = 33{,}3\, J/_{mol.K}$$ (gas poliatómico).

Otro parámetros que puede medirse es "la razón de los calores específicos molares $\gamma.$, definidos como:

$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$., realizando los reemplazos de las anteriores ecuaciones tenemos:

$\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67$ (gas monoatómico)

$\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}40$ (gas diatómico)

$\gamma = \frac{4}{3} = 1{,}33$ (gas poliatómico)

Procesos Adiabáticos: En un proceso adiabático el sistema está bien aislado que no entra ni sale calor, y entonces Q = 0, en este caso la primera ley se expresa así:

$\Delta E_{\text{int.}} = W$ en un caso de un gas ideal queda. $dE_{\text{int.}} = n.C_V\, dT$

$T_f = T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1}$., la temperatura de un gas se eleva al ser comprimido, y la temperatura disminuye cuando el gas se expande.

Procesos isotérmicos:

En un proceso isotérmico: la temperatura permanece constante. Si el sistema es un gas ideal, la energía interna también deberá permanecer constante.

$Q + W = 0$ (proceso isotérmico, gas ideal).

Procesos a volumen constante: si el volumen de un gas permanece constante, no se podría hacer trabajo alguno.
$W = 0.,\therefore \Rightarrow \Delta E_{\text{int.}} = Q$

Procesos cíclicos: se lleva a cabo una secuencia de operaciones que con el tiempo devuelven el sistema a su estado inicial.
$Q + W = 0$

Expansión libre: en este proceso no se realiza trabajo y es un proceso adiabático, por lo tanto:
$W = 0.,\therefore \Rightarrow Q = 0.,\therefore \Rightarrow \Delta E_{\text{int.}} = 0.$

Entropía y Segunda ley de la Termodinámica.

<u>Procesos en una dirección:</u> *"todos los procesos que se realizan en una dirección espontáneamente ocurren en una dirección. Nunca siguen por sí mismos la dirección contraria".*
Los procesos espontáneos en una dirección son ***irreversibles***.
Ejemplos: un trozo de pan caliente sobre la mesa, se enfriara lentamente, no se calentará sin intervención externa.

"si ocurre un proceso irreversible en un sistema cerrado, su entropía siempre aumenta; nunca disminuye".

*"la **Entropía** siempre se incrementa en los procesos irreversibles, se diferencia de la **Energía** en que no obedece una ley de Conservación, en un sistema cerrado".*

*"**El cambio de Entropía** ocurre en un proceso reversible, donde un sistema cerrado pasa de estado inicial bien definido a otro estado final bien definido"*

$\Delta S = n.R.\ln\frac{V_f}{V_i} + n.C_V.\ln\frac{T_f}{T_i}$., la entropía es una propiedad del estado, típica del estado particular de un sistema sin que dependa de cómo llegó a él. (Resnick).-

PROBLEMAS

Pb. 14. 01.- Volkenshtein.
En un recipiente cerrado de 10 litros de capacidad hay aire a la presión de 10^5 N/m^2.,m ¿Qué cantidad de calor habrá que comunicarle a este aire para que la presión en el recipiente aumente 5 veces?.

Solución:

Datos:

V = 10 (l) = Cte.

P_1 = 105 (N/m^2).

Q = ¿?.

P_2 = 5 p_1.

la masa del aire encerrado vale:

$p.V = \frac{m}{M}R.T.,\therefore \Rightarrow m = \frac{p.V.M}{R.T}$ (1)

Donde es el peso molecular del aire:

$M = 28{,}94\left(g/_{mol}\right)$

Con la 1era., Ley de la termodinámica, es : $Q - W = \Delta E$., pero tenemos que:
$W = \int p.dV = 0$., pues es $V = cte.$, entonces nos queda que $Q = \Delta E = n.C_V.\Delta T.$ (2)
Cuando está a la presión p_1, está a la temperatura T_1.
Cuando está a la presión p_2, está a la temperatura T_2.

De acuerdo a (1), como la masa no varía, por estar el recipiente cerrado, entonces:

$$\frac{p_1.V.M}{R.T_1} = \frac{P_2.V.M}{R.T_2} .,\therefore\Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} .,$$ y como el incremento de la temperatura es:

$\Delta T = T_2 - T_1$., resulta que: $\Delta T = T_2 - T_1 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - T_1 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)$

$\Delta T = T_1\left(\frac{5p_1}{p_1} - 1\right) = 4T_1$ a la temperatura T_1 la calculamos con (1):

$T_1 = \frac{p_1.V.M}{m.R} .,\Rightarrow pero \Rightarrow n = \frac{m}{M} .,resulta \Rightarrow \Delta T = 4\frac{p_1.V}{n.R} .,$ y con (2) tenemos:

$Q = C_V.\frac{4.p_1.V}{R}$, también es : $\left.\begin{matrix} R = C_p - C_V \\ \gamma = \frac{C_p}{C_V} \end{matrix}\right\} \quad Q = \frac{4.p_1.V}{\frac{C_p - C_V}{C_V}} = \frac{4.p_1.V}{\gamma - 1}$

$$Q = \frac{4.p_1.V}{\gamma - 1} = \frac{4.10^5\left[N/m^2\right]10\left[dm^3\right]}{1,4 - 1} = 238,8[cal] = 10^3[J]$$

Pb. 14. 02.- Sears.
La temperatura en una habitación es 40°C. Una vasija de paredes metálicas se enfría añadiendo agua fría. A 10°C las paredes de la vasija se empañan. ¿Cuál es la humedad relativa en la habitación?.

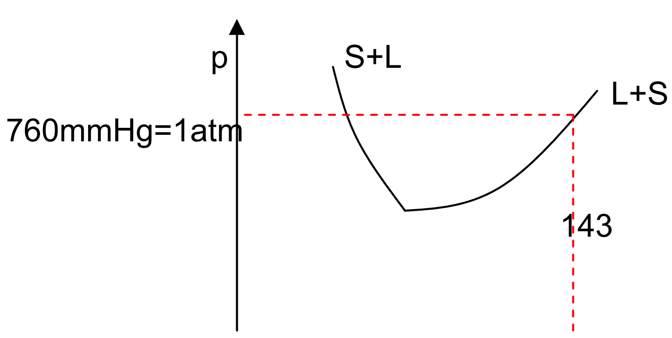
Solución:

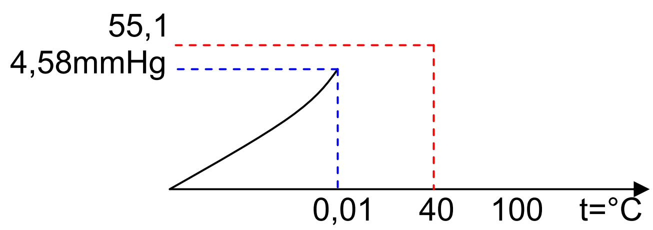
$t = 40°C$
$t_R = 10°C$
$H = ?$

$$H = \frac{Presión,10°C}{Presión,40°C} = \frac{8,94}{55,1} = 0,162 .,$$

$Presión,10°C =$ presión de vapor a 10°C.
$Presión,40°C =$ presión de vapor a 40°C.

$H = 16,2\%.$





Pb. 14. 03.- Volkenshtein.
La presión del aire que había dentro de una botella bien cerrada, a la temperatura de 7°C, era igual a 1 atm. La botella se calentó y el tapón salió disparado. Hallar hasta qué temperatura se calentó la botella sabiendo que el tapón salió despedido cuando la presión del aire en ella era igual a 1,3 atm.

Solución:
$t_1 = 7(°C)$
$p_1 = 1(atm)$ $\qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad \Rightarrow T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$
$t_2 = ?$
$p_2 = 1{,}3(atm)$

$$T_2 = (273 + 7).\frac{1{,}3}{1} = 364°K$$
$$T_2 = 364 - 273 = 91°C.$$

Pb. 14. 04.- Volkenshtein.
¿Qué temperatura tienen 2 gramos de Nitrógeno, si ocupan un volumen de 820 cm^3, a la presión de 2 atm.?

Solución:
$m = 2(g)$
$M = 28\left({}^{g}\!/\!{}_{mol}\right)$
$V = 820(cm^3)$ $\qquad p.V = n.R.T \qquad n = \frac{m}{M}, \qquad T = \frac{p.V}{n.R} = \frac{M.p.V}{m.R}$
$p = 2(atm)$
$T = ?$

$$T = \frac{28\left({}^{g}\!/\!{}_{mol}\right).2(atm).\dfrac{1033\left(\dfrac{gf}{cm^2}\right)}{1(atm)}.\dfrac{1(g).980\left(\dfrac{cm}{s^2}\right)}{1(gf)}.820(cm^3)}{2(g).8{,}3149\left({}^{J}\!/\!{}_{mol.°K}\right).\dfrac{10^7(erg)}{1(J)}.\dfrac{1(g)\left(\dfrac{cm^2}{s^2}\right)}{1(erg)}} = 279{,}79°K = 7°C.$$

Pb. 14. 05.- Volkenshtein.
¡Que volumen ocupan 10 (g) de O, a la presión de 750 mmHg, y a la temperatura de 20°C?.

Solución:

$V = ?$

$m = 10(g)$

$M = 32\left({}^{g}\!/_{mol} \right)$ $\qquad\qquad V = \dfrac{m.R.T}{M.p}$

$p = 750(mmHg)$

$T = 20°C$

$$V = \frac{10(g).8{,}3149\left(\dfrac{J}{mol.°K} \right).(273+20)(°K)}{32\left(\dfrac{g}{mol} \right).750(mmHg)} = 7614(cm^3)$$

Pb. 14. 06.- Volkeinshtein.
En un recipiente cerrado de 3 (litros) de capacidad hay N a 27°C de temperatura y a 3 (atm) de presión. Después de calentarlo, la presión dentro del recipiente aumentó hasta 25 (atm). Determinar: 1) la temperatura del N después de calentarlo, 2) la cantidad de calor que se le comunico al N.

Solución:

$V = 3[l] = cte.$

$M_N = 28\left[{}^{g}\!/_{mol} \right]$ $\qquad\qquad \dfrac{p_1}{T_2} = \dfrac{p_2}{T_2} .,\therefore \Rightarrow T_2 = T_1.\left[\dfrac{p_2}{p_1} \right]$

$t_1 = 27[°C]$

$p_1 = 3[atm]$ $\qquad\qquad T_2 = [273+27].\dfrac{25}{3} = 2500°K$

$p_2 = 25[atm]$

1) $t_2 = ?$ $\qquad\qquad$ 1) $t_2 = 2500 - 273 = 2227°C$

2) $Q = ?$

$Q = \Delta U$., por ser el proceso isocórico además es: $\Delta U = n.C_{V.}\Delta T = n.C_V.(T_2 - T_1)$

la masa de N contenida dentro del recipiente es:

$$p.V = n.R.T = \frac{m}{M}.R.T.,\therefore \Rightarrow m = \frac{p_1.V.M}{R.T_1}., \quad \text{y también:} \quad n = \frac{p_1.V}{R.T_1}.,\Rightarrow n = \frac{p_2.V}{R.T_2}$$

$$n.T_1 = \frac{p_1.V}{R}.;\Rightarrow n.T_2 = \frac{p_2.V}{R}$$

$$\Delta U = C_V.\left[\frac{p_2.V}{R} - \frac{p_1.V}{R}\right] = \frac{C_V}{R}.V\left[p_2 - p_1\right] = \frac{V\left[p_2 - p_1\right]}{\gamma - 1}., \quad \text{resulta entonces:}$$

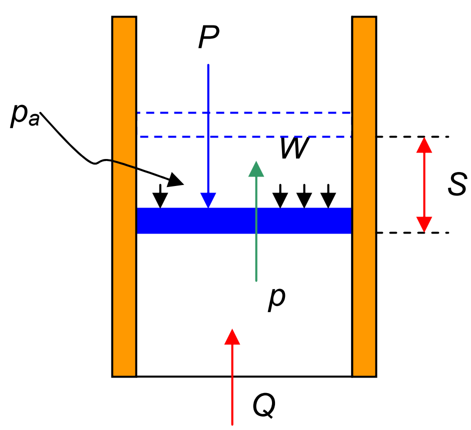
$Q = \dfrac{V\left[p_2 - p_1\right]}{\gamma - 1}.,$ para el N, tenemos que $\gamma = 1{,}4$., por lo que la cantidad de calor que se le comunico a N es:

$$Q = \frac{3[l].[25-3][atm]}{1{,}4-1} = 3993[cal] = 16719[J]$$

Pb. 14. 07.- Volkeinshtéin.

Dentro de un cilindro vertical provisto de émbolo hay 1 (g) de N. 1)¿Qué cantidad de calor será necesaria para calentar éste gas a 10°C?. 2)¿Qué magnitud se elevará el émbolo al ocurrir esto?. El émbolo pesa 1 (kgf) y el área de su sección transversal es igual a 10 cm^2. la presión que actúa sobre el émbolo es igual a 1 (atm).

Solución:



$m = 1[g]$

$Q = ?$

$\Delta t = 10°C$

$S = ?$ la presión total interna que debe equilibrar la presión exterior:

$P = 1[kgf]$

$A = 10[cm^2]$

$p_a = 1[atm]$

$$p = p_a + \frac{P}{A} = 1[atm] + \frac{1[kgf]}{10[cm^2]} = 1{,}033 + 0{,}100 = 1{,}133\left[{kgf}/{cm^2}\right]$$

el proceso será isobárico con esta $p = cte.$

Según la 1era. Ley de la Termodinámica, es:

$$Q - W = \Delta U$$

donde es:
$$\begin{cases} Q = C_p.n.\Delta t \\ W = \int_{V_1}^{V_2} p.dV = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = p.A.S \\ \Delta U = C_V.n.\Delta t. \end{cases}$$

resulta: $C_p.n.\Delta t - p.A.S = C_V.n.\Delta t.$ donde: $n = \frac{m}{M_N}$

el $M_N = 28\left[{g}/{mol}\right] =$ Peso molecular del Nitrógeno.

Entonces tenemos:

$n(C_p - C_V).\Delta t = p.A.S$ como: $R = C_p - C_V.,es \Rightarrow S = \frac{m.R.\Delta t}{M_N.p.A}$

$$S = \frac{1[g].8{,}3149\left[\frac{J}{mol.°C}\right].10[°C]}{28\left[\frac{g}{mol}\right].1{,}133\left[\frac{kgf}{cm^2}\right].10[cm^2]} = 0{,}027[m] = 2{,}7[cm]$$

como es: $\begin{cases} \gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = 1{,}4 \\ R = C_p - \dfrac{C_p}{\gamma} = C_p\left(1 - \dfrac{1}{\gamma}\right) \\ C_p = \dfrac{R}{1 - \dfrac{1}{\gamma}} = \dfrac{\gamma.R}{\gamma - 1} \end{cases}$

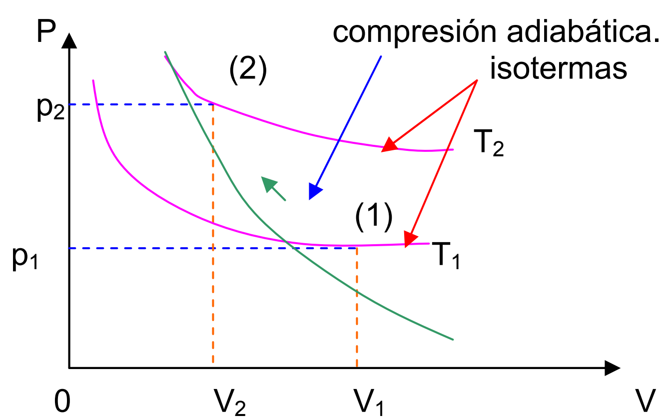
resulta:

$$Q = \frac{\gamma.R}{\gamma - 1}.\frac{m}{M_N}.\Delta t = \frac{1{,}4x8{,}3149\left[\dfrac{J}{mol.°C}\right]}{[1{,}4-1]}.\frac{1[g]}{28\left[\dfrac{g}{mol}\right]}.10[°C] = 2{,}48[cal] = 10{,}4[J]$$

Pb. 14. 08.- Volkenshtein.
Un gas diatómico que se encuentra a la temperatura de 27°C, y a la presión de 2 x 10^6 (N/m^2), se comprime adiabáticamente desde el volumen V_1 hasta el V_2= 0,5 V_1. Hallar la temperatura y la presión del gas después de comprimido.

Solución:

T_1= 273 + 27 = 300°K.
P_1= 2 x 10^6 (N/m2).
V_2 = 0,5.V_1.
T_2 = ?.
P_2 = ?.
γ = 1,4 (gas diatómico).



Entre el punto (1) y (2) rige la relación adiabática:

$T_1.p_1^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} = T_2.p_2^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)}$ (1), además tenemos que: $T_1.V_1^{(\gamma-1)} = T_2.V_2^{(\gamma-1)}$ (2)

$p_1.V_1^{\gamma} = p_2.V_2^{\gamma}$ (3)., $\therefore \Rightarrow p_2 = p_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = p_1\left(\dfrac{V_1}{0{,}5.V_1}\right)^{\gamma} = p_1.2^{\gamma}$

$$p_2 = p_1.2^{\gamma} = 2x10^6\left[\frac{N}{m^2}\right].2^{1,4} = 5,278x10^6\left[\frac{N}{m^2}\right]$$

como en (2), resulta: $T_2 = T_1.\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\gamma-1)} = T_1.\left(\frac{V_1}{0,5.V_1}\right)^{(\gamma-1)} = T_1.2^{(\gamma-1)}$

$$T_2 = 300(°K).2^{0,4} = 396[°K] = 123[°C]$$

Pb. 14. 09.- Resnick.

Considere una losa como la fig. suponga que $\Delta x = 24,9cm; A = 1,80m^2$, y que el material es cobre. Si $T = 12,0°C; \Delta T = 136°C$, y si se alcanza un estado estacionario, calcule a) el gradiente de temperatura; b) la rapidez con que se transfiere calor, y c) la temperatura en un punto de la varilla situado a 11,0 cm, del extremo de alta temperatura.

Solución:

a) $\frac{dT}{dx} =$ gradiente de Temperatura.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{136°C}{0,249m} = 546\ {°C}/{m}$$

b) $H = K.A.\frac{\Delta T}{\Delta x}$., rapidez con que se transfiere calor. $K_{Cu} = 401 W/m.k$

$$H = 401\frac{W}{m.k}.1,8m^2.\frac{136°C}{0,249m} = 394.236W.$$

$$H \cong 394KW.$$

c) $H = \frac{K.A.(T_H - T_L)}{L} = \frac{K.A.T_H}{L} - \frac{K.A.T_L}{L}$

$$\frac{K.A.T_L}{L} = \frac{K.A.T_H}{L} - H.,\therefore \Rightarrow T_L = \frac{K.A.T_H}{L}.\frac{L}{K.A} - \frac{H.L}{K.A}$$

$$T_L = (136°C - 12°C) - \frac{394.000\frac{W}{m}.0,12m}{401\frac{W}{m}.1,8m^2} = 63,96°C$$

$L =$ longitud de la varilla.

BIBLIOGRAFIA

Bueche, **Fundamento de Física I,** Editorial McGraw-Hill.
Resnick, (y otros). **Física. Volumen I,** Editorial: C.E.C.S.A. (5ta., Edición).
Sears, (y otros). **Física Universitaria, Volumen I.** Editorial: Pearson Educación.
Volkeinsthéin (y otros). **Problemas de Física General**. Editorial MIR.